

**Esame di Stato – sessione straordinaria - seconda prova scritta - Liceo scientifico (tutti gli indirizzi) - Prova scritta di Matematica – 11 settembre 2025**

**QUESITO 5 - soluzione di L. Tomasi**

5. Si consideri la famiglia di funzioni  $f_k(x) = \ln(1 - kx) + kx^2$ , dove  $k$  è un parametro reale non nullo. Determinare il valore di  $k$  in modo che il grafico della funzione abbia un punto di flesso a tangente orizzontale.

**Soluzione**

Consideriamo la famiglia di funzioni:

$$f_k(x) = \ln(1 - kx) + kx^2$$

con  $k$  parametro reale non nullo.

Il dominio delle funzioni assegnate è dato da  $1 - kx > 0$ , ossia

$$x < \frac{1}{k}.$$

Poiché  $f_k(0) = 0$ , tutti i grafici passano per l'origine degli assi.

La derivata prima è:

$$f'_k(x) = \frac{-k}{1 - kx} + 2kx = \frac{-k + 2kx - 2k^2x^2}{1 - kx} = \frac{2k^2x^2 - 2kx + k}{kx - 1} = \frac{k(2kx^2 - 2x + 1)}{kx - 1}.$$

Supponiamo  $k > 0$ .

Per esaminare il segno della derivata prima, vediamo intanto qual è il segno del trinomio:

$$2kx^2 - 2x + 1.$$

Calcoliamo

$$\frac{\Delta}{4} = 1 - 2k.$$

Per  $\Delta < 0$ , ossia per  $k > 1/2$ , la derivata è negativa e quindi la funzione è decrescente in tutto il dominio e non può avere un flesso con tangente "orizzontale" (parallela all'asse  $x$ ). La retta di equazione  $x = 1/k$  è asintoto verticale (figura 1).

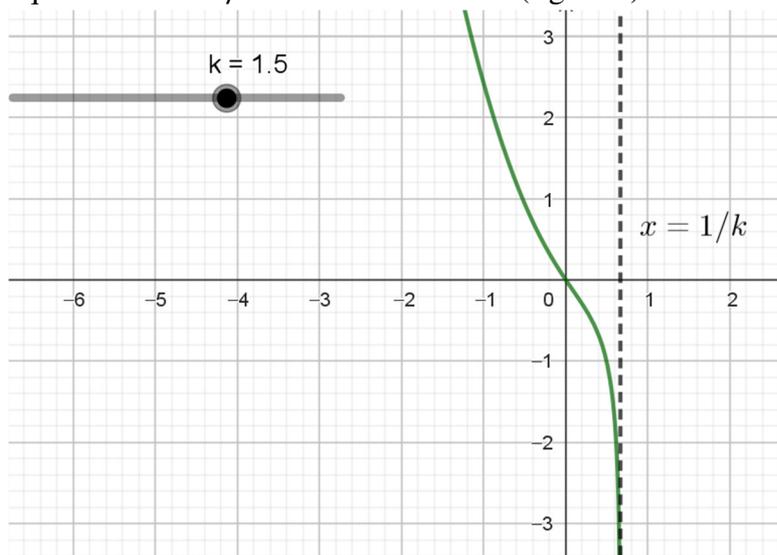


figura 1

Per  $\Delta = 0$ , ossia per  $k = \frac{1}{2}$ , la derivata prima è

$$f'_1(x) = \frac{\frac{1}{2}(x^2 - 2x + 1)}{\frac{1}{2}x - 1} = \frac{(x-1)^2}{x-2},$$

che si annulla per  $x = 1$  ed è negativa negli altri punti del dominio, cioè per  $x < 1$  e per  $1 < x < 2$ . Pertanto la funzione è decrescente (in senso stretto) nel dominio e il punto  $x = 1$  è un punto di flesso con tangente orizzontale (figura 2). Il flesso ha coordinate

$$F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \ln 2\right).$$

In questo caso la funzione ha per asintoto verticale la retta di equazione  $x = 2$ .

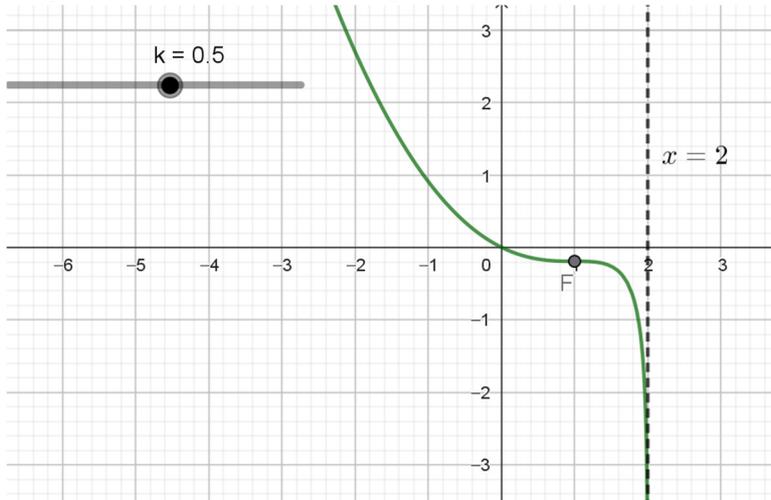


figura 2

Per  $\Delta > 0$ , ossia per  $k < 1/2$ , la derivata prima

$$f'_k(x) = \frac{k(2kx^2 - 2x + 1)}{kx - 1}.$$

si annulla nei punti

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 2k}}{2k}$$

ed è positiva per valori interni all'intervallo delle radici. Tuttavia nel dominio della funzione, la derivata prima è positiva nell'intervallo

$$\frac{1 - \sqrt{1 - 2k}}{2k} < x < \frac{1 + \sqrt{1 - 2k}}{2k}$$

ed è negativa altrimenti (nel dominio).

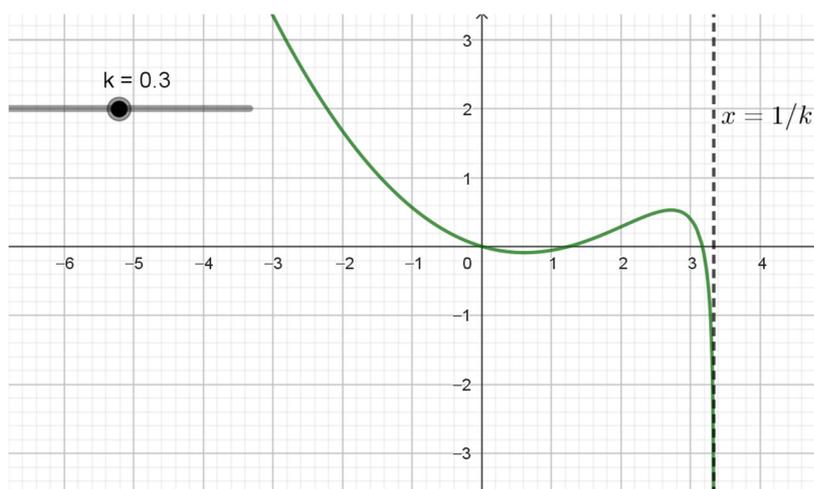
Pertanto il punto di ascissa

$$x = \frac{1 - \sqrt{1 - 2k}}{2k}.$$

è un punto di massimo relativo per la funzione e il punto di ascissa

$$x = \frac{1 + \sqrt{1 - 2k}}{2k}.$$

è un punto di minimo relativo per la funzione e il punto di ascissa (figura 3).



Argomento: analisi matematica; flessi con tangente orizzontale.

### Tabella di analisi del quesito

<b>Livello di difficoltà stimato</b>	<input type="checkbox"/> Basso	<input type="checkbox"/> Medio	<input checked="" type="checkbox"/> Alto	<input type="checkbox"/> Molto alto
<b>Formulazione del quesito</b>	<input type="checkbox"/> Scorretta	<input type="checkbox"/> Ambigua	<input type="checkbox"/> Poco chiara	<input checked="" type="checkbox"/> Corretta <input checked="" type="checkbox"/> Molto chiara
<b>L'argomento è presente nelle Indicazioni Nazionali</b>	<input checked="" type="checkbox"/> Sì		<input type="checkbox"/> No	<input type="checkbox"/> Non è esplicitato / Non è chiaro
<b>L'argomento è presente nel QdR di Matematica</b>	<input checked="" type="checkbox"/> Sì		<input type="checkbox"/> No	<input type="checkbox"/> Non è esplicitato / Non è chiaro
<b>Di solito, viene svolto nella pratica didattica usuale?</b>	<input checked="" type="checkbox"/> Sì		<input type="checkbox"/> No	<input type="checkbox"/> Non sempre
<b>È un argomento presente nei libri di testo di Matematica?</b>	<input type="checkbox"/> No	<input type="checkbox"/> Non sempre		<input checked="" type="checkbox"/> Sempre
<b>Verifica conoscenze / abilità / competenze fondamentali?</b>	<input checked="" type="checkbox"/> Sì		<input type="checkbox"/> Solo parzialmente	<input type="checkbox"/> No
<b>Per la risoluzione del quesito è utile una calcolatrice grafica?</b>	<input checked="" type="checkbox"/> Sì		<input type="checkbox"/> No	<input type="checkbox"/> Parzialmente