

QUESITO 8- soluzione di L. Tomasi

8. Dimostrare che la curva di equazione $y = \frac{2x+1}{x^2+x}$ è simmetrica rispetto al suo punto di flesso.

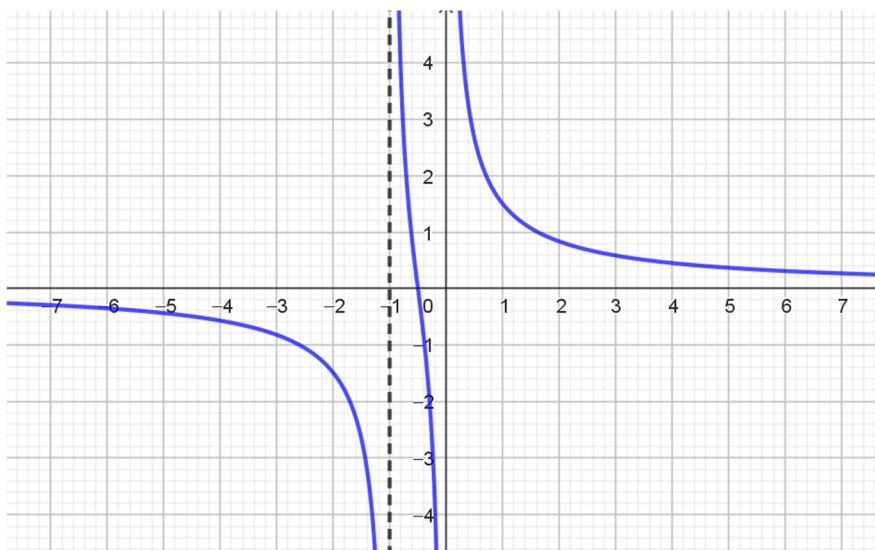
Soluzione

Osservazione. Osserviamo che la funzione data, scritta in forma implicita, è una cubica. Moltiplicando per il binomio al denominatore, si ha infatti: $x^2y + xy - 2x - 1 = 0$.

La funzione

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x}$$

ha come dominio i numeri reali esclusi i punti $x = 0$ e $x = -1$. Pertanto le rette di equazioni $x = 0$ (asse y) e $x = -1$ sono asintoti verticali. Inoltre l'asse x è asintoto orizzontale sia a destra che a sinistra (figura).



figura

Calcoliamo la derivata prima

$$f'(x) = \frac{2(x^2+x) - (2x+1)^2}{(x^2+x)^2} = -\frac{2x^2+2x+1}{(x^2+x)^2}.$$

Si osserva che la derivata prima è sempre negativa nel dominio. Pertanto la funzione è decrescente negli intervalli $x < -1$, $-1 < x < 0$, $x > 0$.

Ricaviamo la derivata seconda. Si ottiene

$$f''(x) = -\frac{(4x+2)(x^2+x)^2 - 2(2x^2+2x+1)(x^2+x)(2x+1)}{(x^2+x)^4} =$$

$$\begin{aligned}
&= - \frac{2(2x+1)(x^2+x)^2 - 2(2x^2+2x+1)(x^2+x)(2x+1)}{(x^2+x)^4} = \\
&= - \frac{2(2x+1)(x^2+x)((x^2+x) - (2x^2+2x+1))}{(x^2+x)^4} = \\
&= - \frac{2(2x+1)(x^2+x)(-x^2-x-1)}{(x^2+x)^4}
\end{aligned}$$

e finalmente

$$f''(x) = \frac{2(2x+1)(x^2+x)(x^2+x+1)}{(x^2+x)^4}$$

il cui segno dipende soltanto dalla funzione polinomiale

$$g(x) = (2x+1)(x^2+x).$$

Studiando il segno di questa cubica, si vede che la derivata seconda si annulla solo nel punto di ascissa $x = -\frac{1}{2}$, che è l'ascissa del flesso. Il flesso ha quindi coordinate

$$F\left(-\frac{1}{2}, 0\right).$$

Per dimostrare che il flesso trovato è il centro di simmetria del grafico, trasliamo la funzione verso “destra” di un vettore $\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{i}$. Si ottiene pertanto

$$y = \frac{2\left(x - \frac{1}{2}\right) + 1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x - \frac{1}{2}\right)} = \frac{2x}{x^2 - \frac{1}{4}} = \frac{8x}{4x^2 - 1}$$

e in definitiva:

$$y = \frac{8x}{4x^2 - 1}$$

che è una funzione dispari rispetto al sistema di assi cartesiani che ha origine nel punto F e gli assi coordinati paralleli ed equiversi rispettivamente agli assi del sistema Oxy .

Argomento. Analisi matematica; flessi; simmetria centrale.

Tabella di analisi del quesito

Livello di difficoltà stimato	☐ Basso	☐ Medio	☒ Alto	☐ Molto alto
Formulazione del quesito	☐ Scorretta	☐ Ambigua	☐ Poco chiara	☒ Corretta ☐ Molto chiara
L'argomento è presente nelle Indicazioni Nazionali	☒ Sì		☐ No	
L'argomento è presente nel QdR di Matematica	☒ Sì		☐ No	
Di solito, viene svolto nella pratica didattica usuale?	☒ Sì		☐ No	
			☐ Non sempre	

È un argomento presente nei libri di testo di Matematica?	☐ No	☐ Non sempre	☒ Sempre
Verifica conoscenze / abilità/ competenze fondamentali?	☒ Sì	☐ Solo parzialmente	☐ No
Per la risoluzione del quesito è utile una calcolatrice grafica?	☒ Sì	☐ No	☐ Parzialmente