Esame di Maturità – seconda prova scritta - Liceo scientifico (tutti gli indirizzi)
Prova scritta di Matematica – 19 giugno 2026

PROBLEMA 2 – soluzione a cura di C.N. Colacino e L. Tomasi

Siano φ_a e γ, rispettivamente, i grafici delle funzioni:

$$f_a(x) = \frac{ax^2}{x-1} \text{ con } a \neq 0 \text{ e } g(x) = \frac{|x|}{x^2+1}$$

a) Al variare del parametro a, studiare gli intevalli di monotonia della funzione f_a. Considerata la retta r, di equazione $y = k$, $k \in \mathbb{R}$, determinare i valori di a e k in modo che r risulti tangente ai grafici φ_a e γ.

b) Siano A e B i punti stazionari, rispettivamente, dei grafici φ_a e γ, con $x_A \neq 0$ e $x_B > 0$. Determinare il valore di A in corrispondenza del quale la misura del segmento AB risulti minima.

   D'ora in avanti si ponga $a = \frac{1}{8}$

c) Studiare le funzioni $f_{\frac{1}{8}}$ e g, esaminandone in particolare la continuità e la derivabilità, e tracciare i loro grafici $\varphi_{\frac{1}{8}}$ e γ in un medesimo sistema di riferimento. Utilizzare tali grafici per risolvere la disequazione $f_{\frac{1}{8}}(x) > g(x)$

d) Calcolare l'area della regione finita di piano delimitata da γ, dall'asse x e dalle rette parallele all'asse y passanti per i punti di flesso.

Soluzione

Punto a)

Il dominio della funzione $f_a(x)$ è $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ per ogni $a \neq 0$.
Si tratta di un fascio di iperboli non equilatere tutte passanti per l'origine degli assi; posto $x \neq 1$, l'equazione del fascio si può scrivere nella forma:

$$ax^2 - xy + y = 0\,.$$

Per studiare gli intervalli di monotonia di tale funzione, calcoliamo la sua derivata prima:

$$f'_a(x) = \frac{2ax(x-1) - ax^2}{(x-1)^2} = \frac{ax^2 - 2ax}{(x-1)^2} = \frac{ax(x-2)}{(x-1)^2}.$$

Il denominatore è strettamente positivo in tutti i punti del dominio della funzione. Studiamo il segno del numeratore al variare del parametro a.
Se $a > 0$, $f'_a(x) > 0$ per $x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$. La funzione $f_a(x)$ sarà dunque monotona crescente negli intervalli $(-\infty; 0)$ e $(2; +\infty)$ e monotona decrescente negli intervalli $(0; 1)$ e $(1; 2)$. Il punto $x = 0$ è un punto di massimo relativo e il punto $x = 2$ è un punto di minimo relativo; il massimo relativo è $f_a(0) = 0$ e il minimo relativo è $f_a(2) = 4a$.
Se invece $a < 0$ la funzione $f_a(x)$ sarà monotona crescente negli intervalli $(0; 1)$ e $(1; 2)$ mentre sarà monotona decrescente negli intervalli $(-\infty; 0)$ e $(2; +\infty)$. Il punto $x = 0$ sarà un punto di

minimo relativo, mentre il punto $x = 2$ sarà un punto di massimo relativo; il minimo relativo è $f_a(0)$ =0 e il massimo relativo è $f_a(2) = 4a$.

La funzione $g(x) = \frac{|x|}{x^2+1}$ ha come dominio $\mathbb{R}$. Per calcolarne la derivata conviene scriverla nel modo seguente:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{-x}{x^2+1} & x < 0 \\ \dfrac{x}{x^2+1} & x \geq 0 \end{cases}$$

La derivata risulta

$$g'(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{(x^2+1)^2} & x < 0 \\ \dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2} & x \geq 0 \end{cases}$$

I punti stazionari sono pertanto $P\left(-1; \frac{1}{2}\right)$ e $B\left(1; \frac{1}{2}\right)$. Quindi la retta orizzontale tangente a γ ha equazione $y = \frac{1}{2}$, ossia $k = \frac{1}{2}$. Abbiamo già visto che i punti stazionari di $f_a(x)$ sono $T(0; 0)$ e $A\ (2; 4a)$. Affinchè la retta $r: y = \frac{1}{2}$ sia tangente a φ_a occorre che $4a = \frac{1}{2}$, ossia $a = \frac{1}{8}$. I valori cercati sono dunque $k = \frac{1}{2}$ e $a = \frac{1}{8}$

Punto b)

Per quanto detto al punto precedente, i punti stazionari in questione sono $A = (2; 4a)$ e $B = \left(1; \frac{1}{2}\right)$. La distanza d tra questi due punti è funzione di a:

$$d(AB) = \sqrt{(2-1)^2 + \left(4a - \frac{1}{2}\right)^2}$$

Poiché la distanza è positiva, il minimo della funzione d coincide col minimo della funzione d^2; ossia della funzione:

$$d^2 = 1 + \left(4a - \frac{1}{2}\right)^2$$

che essendo la somma di due quadrati è minima quando $\left(4a - \frac{1}{2}\right)$ è nullo, ossia per $a = \frac{1}{8}$.

Poniamo ora definitivamente $a = \frac{1}{8}$, ottenendo $f(x) = \frac{x^2}{8(x-1)}$.

Punto c)

Per quanto detto al punto a), la funzione $f_{\frac{1}{8}}(x)$ ha come dominio $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. In tale insieme è continua e derivabile. La sola intersezione con gli assi coordinati è l'origine $O(0; 0)$. La funzione è positiva per $x > 1$ ed è non positiva per $x < 1$. La retta di equazione $x = 1$ è asintoto verticale della funzione. La funzione non può avere asintoti orizzontali in quanto $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, essendo il rapporto tra un polinomio di 2° grado e uno di 1° grado.

Sappiamo che in questo caso c'è un asintoto obliquo (il grado del polinomio al numeratore supera di 1 il grado del polinomio al denominatore). Si ha:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{8(x^2-x)}=\frac{1}{8}=m$$

L'intercetta dell'asintoto è data da:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{1}{8}\frac{x^2}{x-1}-\frac{1}{8}x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x}{8(x-1)}=\frac{1}{8}=q$$

e pertanto l'equazione dell'asintoto obliquo è $y=\frac{1}{8}x+\frac{1}{8}$.

Il punto di intersezione degli asintoti $C\left(1,\frac{1}{4}\right)$ è il centro di simmetria della curva (iperbole non equilatera).

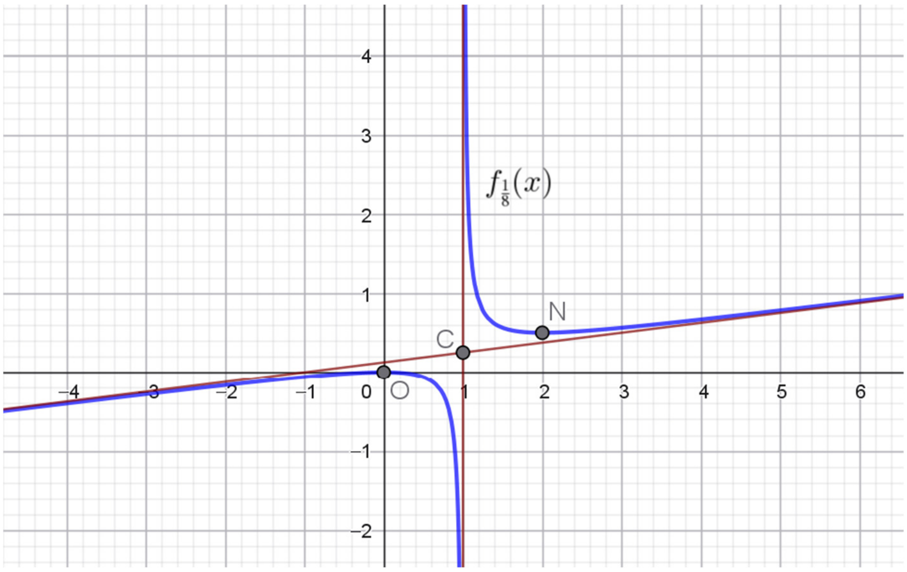

Figura 1

Per quanto detto al punto a) la funzione è crescente per $x<0$ e per $x>2$ ed è decrescente per $0<x<1$ e per $1<x<2$.

La derivata seconda è

$$f''(x)=\frac{1}{8}\frac{2x-2}{(x-1)^2}-\frac{2x^2-4x}{(x-1)^3}=\frac{1}{8}\frac{2}{(x-1)^3}=\frac{1}{4(x-1)^3}$$

La derivata seconda è positiva per $x>1$ e negativa per $x<1$; pertanto la funzione è convessa per $x>1$ e concava per $x<1$ (figura 1).

La funzione $g(x)=\frac{|x|}{x^2+1}$ è definita su tutta la retta reale, è continua in tutto il suo dominio ed è pari, $g(-x)=g(x)$. Non è derivabile in $x=0$ dove presenta un punto angoloso, in quanto la derivata destra è $g'_+(0)=1$ e la derivata sinistra è $g'_-(0)=-1$. Anche in questo caso la funzione ha un come unico punto d'intersezione con gli assi coordinati l'origine $O(0;0)$. La funzione è sempre positiva, essendo il rapporto di due funzioni sempre positive. La funzione è crescente per $x<-1$ e per $0<x<1$ mentre è decrescente per $-1<x<0$ e per $x>1$. Essendo definita $\forall x\in\mathbb{R}$, la funzione non ammette asintoti verticali, mentre la retta $y=0$, ossia l'asse delle ascisse, è asintoto orizzontale sia destro che sinistro. La derivata seconda vale:

$$g''(x) = \begin{cases} \dfrac{-2x^3+6x}{(x^2+1)^3} & x<0 \\ \dfrac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3} & x \geq 0 \end{cases}$$

Da cui ricaviamo che le ascisse dei punti di flesso sono $x_1 = -\sqrt{3}$ e $x_2 = \sqrt{3}$.
Il grafico delle due funzioni nello stesso piano cartesiano è il seguente (figura 2), la funzione disegnata in blu è $f_{\frac{1}{8}}(x)$ e la funzione disegnata in rosso è $g(x)$, da cui si vede immediatamente che

$$f_{\frac{1}{8}}(x) > g(x) \text{ per } x > 1.$$

Figura 2

Punto d)
Per quanto visto al punto precedente, le equazioni delle rette parallele all'asse delle ordinate e passanti per i punti di flesso di $g(x)$ sono $x_1 = -\sqrt{3}$ e $x_2 = \sqrt{3}$. L'area cercata pertanto è

$$S = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{|x|}{x^2+1}\,dx$$

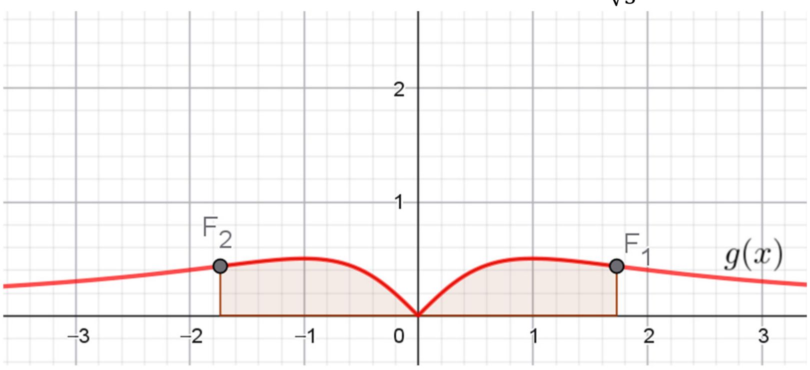

Figura 3

Questo è l'integrale di una funzione pari in un intervallo simmetrico rispetto all'origine degli assi (figura 3); pertanto si ha:

$$S = 2\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x}{x^2+1}\,dx = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2x}{x^2+1}\,dx = [\ln(x^2+1)]_0^{\sqrt{3}} = \ln 4 - \ln 1 = \ln 4\,.$$

Tabella di analisi/commento del problema

Livello di difficoltà stimato	☐ Basso	☐ Medio	☒ Alto	☐ Molto alto
Formulazione del problema	☐ Scorretta	☐ Ambigua	☐ Poco chiara	☒ Corretta / ☐ Molto chiara
Si tratta di un problema contestualizzato	☒ No	☐ Parzialmente	☐ In modo accettabile	☐ Ben contestualizzato
L'argomento è presente nelle Indicazioni Nazionali	☒ Sì	☐ No		☐ Non è esplicitato / Non è chiaro
L'argomento è presente nel QdR di Matematica?	☒ Sì	☐ No		☐ Non è esplicitato / Non è chiaro
Di solito, viene svolto nella pratica didattica usuale?	☒ Sì	☐ No		☐ Non sempre
È un argomento presente nei libri di testo di Matematica?	☐ No	☐ Non sempre		☒ Sempre
Verifica conoscenze / abilità/ competenze fondamentali?	☒ Sì	☐ Solo parzialmente		☐ No
Per la risoluzione del problema è utile una calcolatrice grafica?	☒ Sì	☐ No		☐ Parzialmente