

Esame di Maturità – seconda prova scritta - Liceo Scientifico
Prova scritta di Matematica - 19 giugno 2026

QUESITO 2 - soluzione a cura di L. Rossi e L. Tomasi

2. Si considerino, nello spazio tridimensionale, i punti $A(2; -4; 3)$, $B(3; 5; -1)$, $C(-6; 1; 0)$, $D(-1; 4; 8)$.

- Verificare che A, B, C, D sono i vertici di un tetraedro regolare.
- Determinare l'equazione del piano tangente in A alla superficie sferica passante per i punti A, B, C, D .

Soluzione

Punto a)

I quattro punti dati non sono complanari. Per dimostrarlo, possiamo trovare l'equazione del piano che passa per A, B, C , che è

$$x - 5y - 11z + 11 = 0.$$

Il punto D non appartiene a questo piano perché sostituendo si ha

$$-1 - 5 \cdot 4 - 11 \cdot 8 + 11 = -98 \neq 0$$

Per verificare che A, B, C, D è un tetraedro regolare, verifichiamo che tutti gli spigoli sono congruenti:

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2} = \sqrt{1 + 81 + 16} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$$

$$\overline{AC} = \sqrt{64 + 25 + 9} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$$

$$\overline{AD} = \sqrt{9 + 64 + 25} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$$

$$\overline{BC} = \sqrt{81 + 16 + 1} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$$

$$\overline{BD} = \sqrt{16 + 1 + 81} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$$

$$\overline{CD} = \sqrt{25 + 9 + 64} = \sqrt{98} = 7\sqrt{2}$$

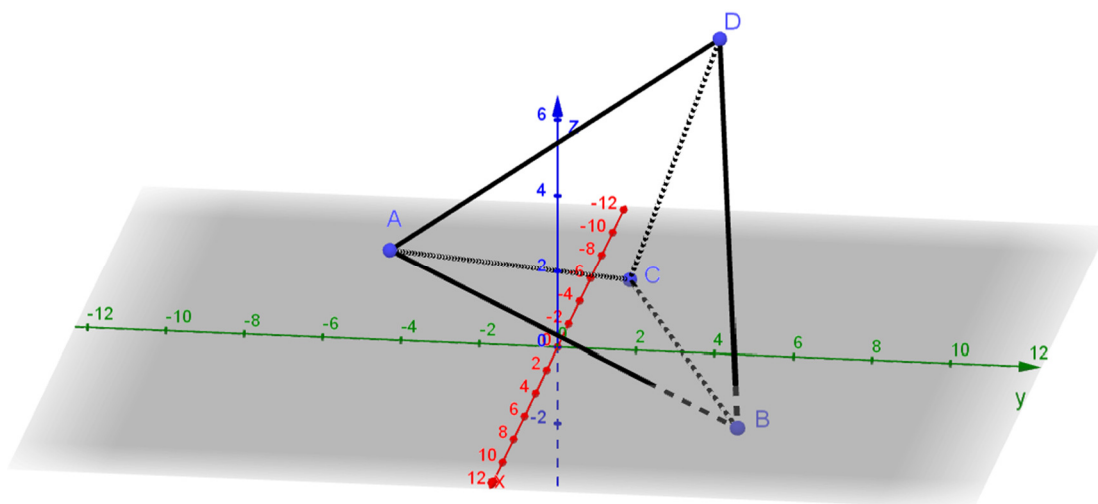


Figura 1

Punto b)

Per trovare l'equazione del piano tangente alla superficie sferica in A , troviamo il vettore normale al piano che passa per A e per il baricentro G della faccia BCD (essendo il solido un tetraedro regolare):

$$G = \left(\frac{x_B + x_C + x_D}{3}, \frac{y_B + y_C + y_D}{3}, \frac{z_B + z_C + z_D}{3} \right) = \left(-\frac{4}{3}, \frac{10}{3}, \frac{7}{3} \right)$$

Il vettore \overrightarrow{GA} ha componenti $\vec{v}_{GA} = \left(\frac{10}{3}, -\frac{22}{3}, \frac{2}{3} \right)$; come vettore normale al piano possiamo considerare il vettore $\vec{n} = (5, -11, 1)$ parallelo a \overrightarrow{GA} .

Preso un punto $P(x, y, z)$ qualunque del piano, imponiamo che il vettore \overrightarrow{AP} sia perpendicolare al vettore \vec{n} ossia che il loro prodotto scalare sia nullo:

$$(x - 2, y + 4, z - 3) \cdot (5, -11, 1) = 0$$

da cui svolgendo i calcoli si ottiene l'equazione del piano:

$$5x - 11y + z - 57 = 0.$$

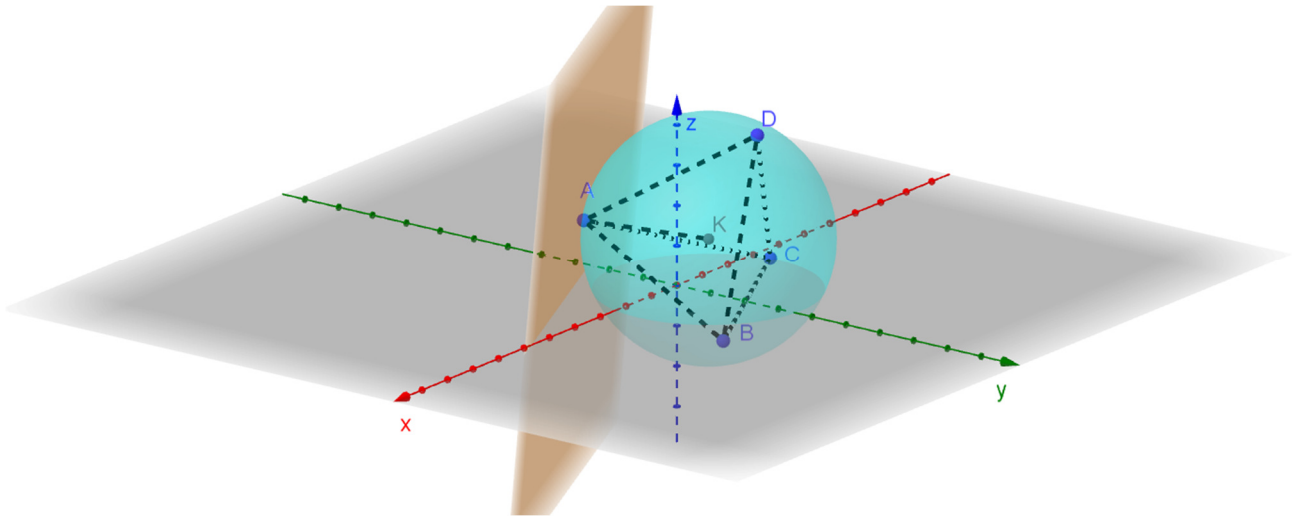


Figura 2

In un altro modo, si poteva trovare il centro della sfera circoscritta al tetraedro regolare, che coincide con il suo baricentro:

$$K = \frac{A + B + C + D}{4}$$

$$K = \left(\frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4}, \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4}, \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4} \right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2} \right)$$

Vettore \overrightarrow{KA} :

$$\overrightarrow{KA} = (x_A - x_K, y_A - y_K, z_A - z_K) = \left(\frac{5}{2}, -\frac{11}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

Piano passante per A e perpendicolare al vettore \overrightarrow{KA} :

$$\frac{5}{2}(x - 2) - \frac{11}{2}(y + 4) + \frac{1}{2}(z - 3) = 0$$

ossia

$$5(x - 2) - 11(y + 4) + (z - 3) = 0$$

che dà

$$5x - 11y + z - 57 = 0.$$

Tabella di analisi del quesito

Livello di difficoltà stimato	<input type="checkbox"/> Basso	<input checked="" type="checkbox"/> Medio	<input type="checkbox"/> Alto	<input type="checkbox"/> Molto alto	
Formulazione del quesito	<input type="checkbox"/> Scorretta	<input type="checkbox"/> Ambigua	<input type="checkbox"/> Poco chiara	<input type="checkbox"/> Corretta	<input checked="" type="checkbox"/> Molto chiara
L'argomento è presente nelle Indicazioni Nazionali	<input checked="" type="checkbox"/> Sì		<input type="checkbox"/> No		<input type="checkbox"/> Non è esplicitato / Non è chiaro
L'argomento è presente nel QdR di Matematica	<input checked="" type="checkbox"/> Sì		<input type="checkbox"/> No		<input type="checkbox"/> Non è esplicitato / Non è chiaro
Di solito, viene svolto nella pratica didattica usuale?	<input checked="" type="checkbox"/> Sì		<input type="checkbox"/> No		<input type="checkbox"/> Non sempre
È un argomento presente nei libri di testo di Matematica?	<input type="checkbox"/> No		<input type="checkbox"/> Non sempre		<input checked="" type="checkbox"/> Sempre
Verifica conoscenze / abilità/ competenze fondamentali?	<input checked="" type="checkbox"/> Sì		<input type="checkbox"/> Solo parzialmente		<input type="checkbox"/> No
Per la risoluzione del quesito è utile una calcolatrice grafica?	<input type="checkbox"/> Sì		<input type="checkbox"/> No		<input checked="" type="checkbox"/> Parzialmente