

Esame di Maturità – seconda prova scritta - Liceo Scientifico
Prova scritta di Matematica - 19 giugno 2026

QUESITO 4 - soluzione a cura di Sara De Stefani

4. Si consideri la funzione $F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt + \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2} dt$ (con $x > 0$).

Dimostrare che la funzione $F(x)$ è una funzione costante e calcolarne il valore.

Soluzione

Data la funzione

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt + \int_0^{1/x} \frac{1}{1+t^2} dt,$$

si ha che:

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = [\arctan t]_0^x = \arctan x - \arctan 0 = \arctan x$$

e

$$\int_0^{1/x} \frac{1}{1+t^2} dt = [\arctan t]_0^{1/x} = \arctan\left(\frac{1}{x}\right) - \arctan 0 = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

Quindi: $F(x) = \arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$.

Calcolando la derivata

$$F'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0$$

si deduce che $F(x)$ è costante per $x > 0$, essendo la funzione $F(x)$ continua per ogni $x > 0$.

Essendo $F(1) = \arctan 1 + \arctan(1) = \frac{\pi}{2}$, la funzione $F(x)$ risulta costante per $x > 0$ di valore $\frac{\pi}{2}$.

Tabella di analisi del quesito ☒

Livello di difficoltà stimato	<input type="checkbox"/> Basso	<input checked="" type="checkbox"/> Medio	<input type="checkbox"/> Alto	<input type="checkbox"/> Molto alto	
Formulazione del quesito	<input type="checkbox"/> Scorretta	<input type="checkbox"/> Ambigua	<input type="checkbox"/> Poco chiara	<input checked="" type="checkbox"/> Corretta	<input type="checkbox"/> Molto chiara
L'argomento è presente nelle Indicazioni Nazionali	<input checked="" type="checkbox"/> Sì		<input type="checkbox"/> No		<input type="checkbox"/> Non è esplicitato / Non è chiaro
L'argomento è presente nel QdR di Matematica	<input checked="" type="checkbox"/> Sì		<input type="checkbox"/> No		<input type="checkbox"/> Non è esplicitato / Non è chiaro

Di solito, viene svolto nella pratica didattica usuale?	<input checked="" type="checkbox"/> Sì	<input type="checkbox"/> No	<input type="checkbox"/> Non sempre
È un argomento presente nei libri di testo di Matematica?	<input type="checkbox"/> No	<input type="checkbox"/> Non sempre	<input checked="" type="checkbox"/> Sempre
Verifica conoscenze / abilità/ competenze fondamentali?	<input checked="" type="checkbox"/> Sì	<input type="checkbox"/> Solo parzialmente	<input type="checkbox"/> No
Per la risoluzione del quesito è utile una calcolatrice grafica?	<input type="checkbox"/> Sì	<input checked="" type="checkbox"/> No	<input type="checkbox"/> Parzialmente