

PROBLEMA 1 – soluzione di L. Tomasi

Si consideri la funzione $N(t) = (at^2 + b)e^{ct}$, con a, b, c parametri reali caratteristici del fenomeno e $t \geq 0$. Tale funzione descrive l'ultima fase di un'epidemia (coda epidemica), in cui $N(t)$, espresso in migliaia, rappresenta il numero di individui che hanno contratto l'infezione nel giorno t . Si indichi con γ il grafico rappresentativo di N .

- a) Determinare il valore dei parametri, sapendo che all'istante iniziale (picco epidemico) il modello assume valori $N(0) = 4$ e $N'(0) = -2$ e sapendo che la pendenza del grafico si annulla in corrispondenza del secondo giorno di decrescita dell'epidemia.

D'ora in avanti, indipendentemente dalle rispettive unità di misura, si ponga $a = 1$, $b = 4$ e $c = -\frac{1}{2}$.

- b) Determinare i valori t_m e t_M per i quali la coda epidemica registra una decrescita, rispettivamente, minima e massima.
c) Studiare la funzione N , tracciare il grafico γ e scrivere le equazioni delle rette tangenti nei punti di flesso.

La transizione dalla fase di declino alla fase endemica avviene quando l'infezione si stabilizza; si supponga che ciò si realizzi appena i nuovi infetti giornalieri scendono sotto lo 0,5% di $N(0)$.

- d) Verificare che tale transizione avviene 20 giorni dopo che è stato registrato il picco. Determinare il numero medio di infetti giornalieri durante la fase di declino.

Soluzione

Punto a)

La famiglia di funzioni ha per equazione

$$N(t) = (at^2 + b)e^{ct}$$

con a, b, c parametri reali e dominio assegnato $t \geq 0$.

Punto a)

Poiché deve essere $N(0) = 4$, si ha $b = 4$.

Ricaviamo la derivata prima:

$$N'(t) = 2ate^{ct} + (at^2 + 4)ce^{ct} = e^{ct}(2at + act^2 + 4c).$$

Poiché deve essere $N'(2) = 0$, si ottiene $4c = -2$ e quindi $c = -\frac{1}{2}$.

Deve essere inoltre $N'(2) = 0$; sostituendo in

$$N'(t) = e^{-\frac{t}{2}} \left(2at - \frac{a}{2}t^2 - 2 \right)$$

si ottiene quindi $a = 1$ e in definitiva

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \\ c = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Quindi la funzione $N(t)$ ha la seguente espressione:

$$N(t) = (t^2 + 4)e^{-\frac{1}{2}t}$$

e il grafico indicato nella figura 1 (che si può ottenere immediatamente con una calcolatrice grafica).

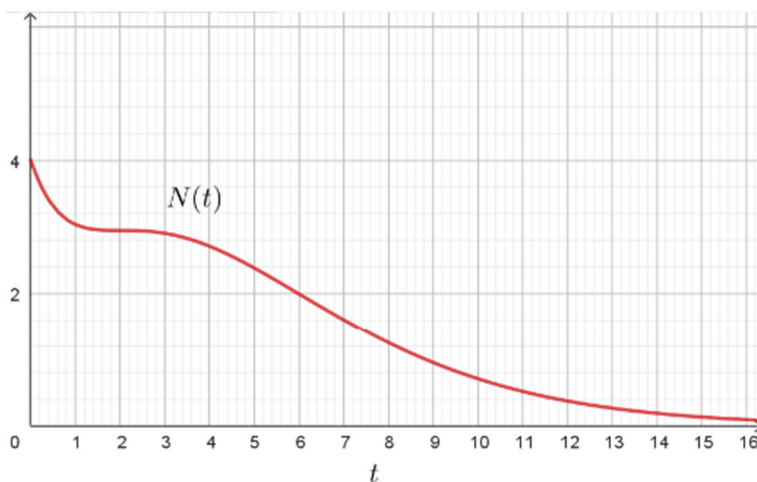


Figura 1

Punto b)

La derivata prima è

$$N'(t) = -e^{\frac{t}{2}} \left(\frac{1}{2}t^2 - 2t + 2 \right)$$

Per $t \geq 0$ è sempre negativa o nulla.

Possiamo considerare la funzione (rappresenta la decrescita):

$$f(t) = |N'(t)|$$

Il massimo della decrescita si ha per $t_M = 0$ (punto di massimo assoluto) e per $t_m = 6$ (punto di massimo relativo).

Nella figura 2 sono indicati i grafici di $N(t)$, $N'(t)$ ed $f(t)$.

Punto c)

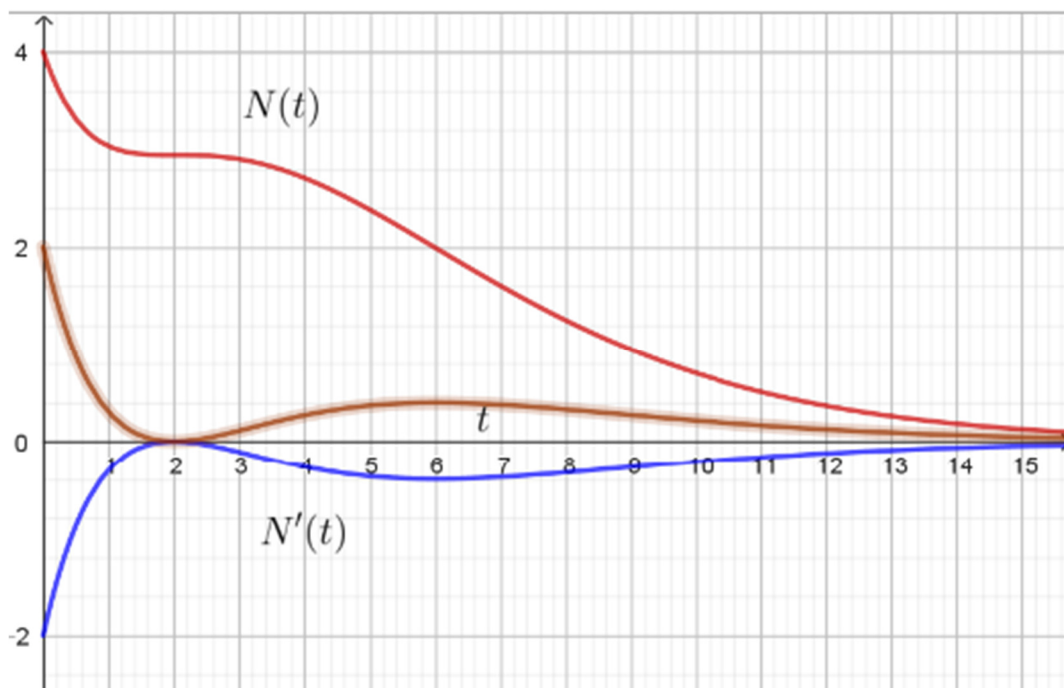


Figura 2

La derivata seconda è data da:

$$N''(t) = e^{\frac{t}{2}} \left(\frac{1}{4} t^2 - 2t + 3 \right)$$

I punti di flesso sono $t = 2$ e $t = 6$.

Nel punto $t = 2$ la retta tangente è parallela all'asse delle ascisse ed ha equazione $N = N(2)$, ossia

$$N = \frac{8}{e}$$

Per $t = 6$ (giorni) la retta di flesso ha equazione

$$N - N(6) = N'(6)(t - 6)$$

Poiché $N(6) = \frac{40}{e^3}$ ed $N'(6) = -2e^{-3}$, si ottiene che la retta tangente di flesso ha equazione

$$N - \frac{40}{e^3} = -2e^{-3}(t - 6)$$

$$N = \frac{2}{e^3}(26 - t)$$

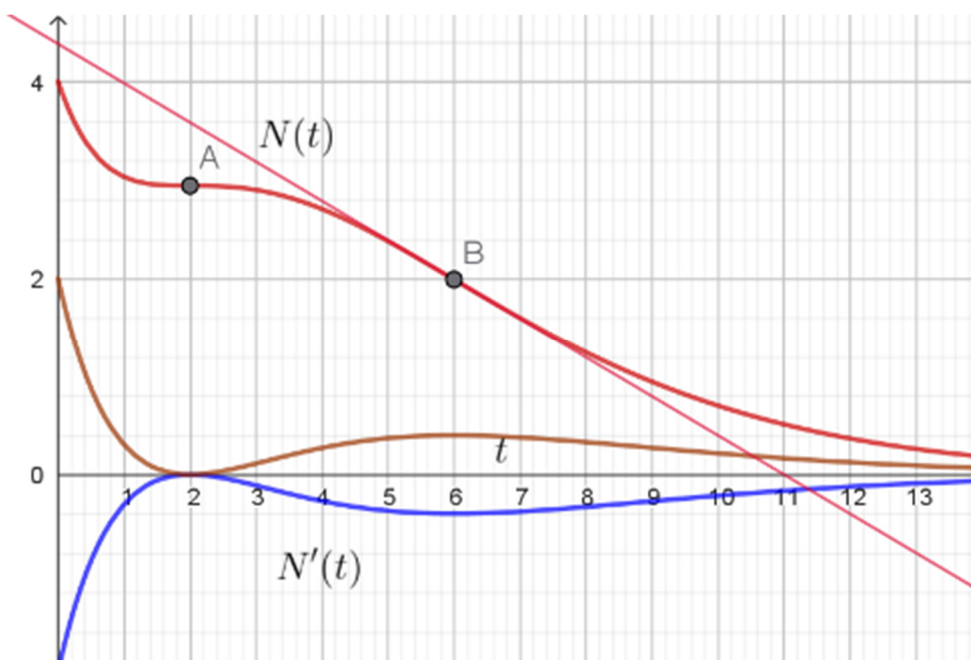


Figura 3

Punto d)

L'infezione si stabilizza quando $N(t)$ diventa minore dello 0,5% di $N(0) = 4000$, che è 20. In migliaia, $\frac{20}{1000} = 0,02$.

Occorre quindi risolvere la disequazione (in migliaia):

$$N(t) < \frac{20}{1000}$$

ossia

$$(t^2 + 4)e^{-\frac{1}{2}t} < 0,02$$

che si può scrivere

$$e^{-\frac{t}{2}} < \frac{0,02}{t^2 + 4}$$

Risolvendo con una calcolatrice grafica (figura 4) si trova $t > 20$ (giorni).

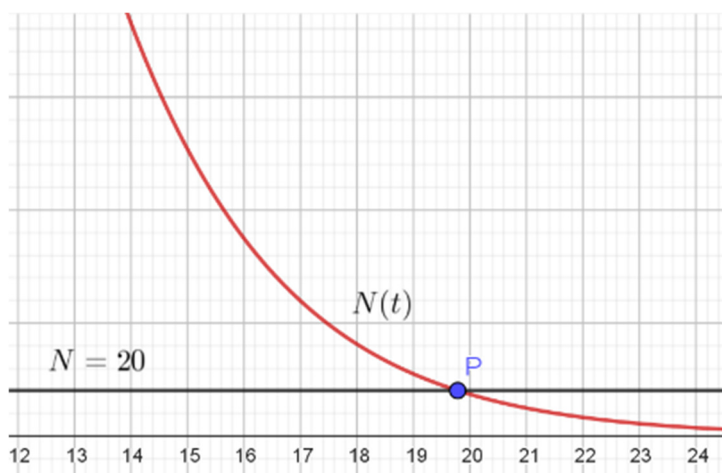


Figura 4

Tabella di analisi/commento del problema

Livello di difficoltà stimato	☐ Basso	☐ Medio/Alto	☒ Alto	☐ Molto alto (punto c)	
Formulazione del problema	☐ Scorretta	☐ Ambigua	☐ Poco chiara	☒ Corretta	☐ Molto chiara
Si tratta di un problema contestualizzato	☐ No	☐ Parzialmente	☒ In modo accettabile	☐ Ben contestualizzato	
L'argomento è presente nelle Indicazioni Nazionali	☒ Sì		☐ No		☐ Non è esplicitato / Non è chiaro
L'argomento è presente nel QdR di Matematica?	☒ Sì		☐ No		☐ Non è esplicitato / Non è chiaro
Di solito, viene svolto nella pratica didattica usuale?	☐ Sì		☐ No		☒ Non sempre
È un argomento presente nei libri di testo di Matematica?	☐ No		☒ Non sempre		☐ Sempre
Verifica conoscenze / abilità/ competenze fondamentali?	☒ Sì		☐ Solo parzialmente		☐ No
Per la risoluzione del problema è utile una calcolatrice grafica?	☒ Sì		☐ No		☐ Parzialmente