

Esame di Maturità – sessione straordinaria - seconda prova scritta - Liceo scientifico (tutti gli indirizzi) - Prova scritta di Matematica – 24 settembre 2026

PROBLEMA 2 – soluzione a cura di C. N. Colacino

Si consideri la famiglia di funzioni $f_a(x) = ax - \ln(a + x)$ con $a \in \mathbb{R}$ e si indichi con γ_a il grafico di f_a .

- Al variare del parametro a calcolare i limiti agli estremi del dominio e studiare la monotonia e la concavità di f_a .
- Stabilire per quali valori del parametro il grafico γ_a possiede un punto stazionario e determinare il valore di a affinché tale punto abbia ordinata massima.
- Verificare che se $a = 1$, γ_a è tangente all'asse delle ascisse. Studiare la funzione f_1 e tracciare il grafico γ_1 .
- Determinare l'area della regione piana compresa tra l'asse delle ascisse, γ_1 e la retta di equazione $x = 2$.

Soluzione

Punto a)

Poiché l'argomento del logaritmo dev'essere maggiore di zero, il dominio della funzione $f_a(x)$ è dato dai numeri reali tali che $x > -a$.

Studiamo prima il limite:

$$\lim_{x \rightarrow -a^+} f_a(x) = +\infty \quad (a \in \mathbb{R})$$

La retta $x = -a$ è pertanto asintoto verticale della funzione $\forall a \in \mathbb{R}$.

Studiamo il limite per $x \rightarrow +\infty$. Qui bisogna studiare attentamente la funzione a seconda del segno di a .

Per $a > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_a(x) = +\infty$, in quanto il termine lineare è un infinito di ordine superiore rispetto al logaritmo.

Per $a = 0$, $f_0(x) = -\ln x$ da cui segue immediatamente $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_0(x) = -\infty$.

Per $a < 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_a(x) = -\infty$ perché di nuovo il termine lineare domina sul logaritmo.

Per studiare gli intervalli di monotonia, calcolo la derivata prima e ne studio il segno:

$$f'_a(x) = a - \frac{1}{a+x} = \frac{a^2 + ax - 1}{a+x}$$

Nel dominio il denominatore è sempre positivo; quindi il segno di questa espressione dipende solo dal numeratore. Il caso più semplice è $a = 0$ da cui

$$f'_0(x) = -\frac{1}{x} < 0$$

La funzione quindi è strettamente decrescente in tutto il suo dominio e non presenta punti stazionari.

Studiamo il caso $a > 0$, dobbiamo studiare il segno di $a^2 + ax - 1$. Questa espressione si annulla per $x = \frac{1-a^2}{a} = \frac{1}{a} - a$ che è pertanto il punto stazionario (è nel dominio perché $x + a = \frac{1}{a} > 0$).

La funzione sarà pertanto decrescente per $-a < x < \frac{1}{a} - a$ e crescente per $x > \frac{1}{a} - a$. Il punto stazionario, trovato in precedenza, $x = \frac{1}{a} - a$ sarà pertanto un punto di minimo assoluto.

Il terzo e ultimo caso è $a < 0$, in cui troviamo $f'_a(x) = a - \frac{1}{a+x}$ ovvero la somma di due termini negativi. La funzione sarà pertanto sempre decrescente e non ammetterà punti stazionari.

Per studiare la concavità, devo studiare la derivata seconda:

$$f''_a(x) = \frac{1}{(a+x)^2}$$

La derivata seconda è sempre positiva e quindi la funzione è sempre convessa per qualunque valore di a . Pertanto non esistono punti di flesso.

Punto b)

Dal punto precedente sappiamo che la funzione ammette un punto stazionario se $a > 0$. Tale punto ha coordinate $P\left(\frac{1}{a} - a; 1 - a^2 + \ln a\right)$. Vogliamo trovare il valore di a che rende massima l'ordinata. Consideriamo dunque l'ordinata come una funzione del parametro a :

$$g(a) = 1 - a^2 + \ln a$$

Per trovare il massimo di tale espressione, calcolo la derivata prima:

$$g'(a) = -2a + \frac{1}{a}$$

Questa espressione si annulla per $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$. La derivata seconda vale $g''(a) = -2 - \frac{1}{a^2}$ che è sempre negativa, pertanto $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$ è effettivamente un punto di massimo relativo. Il punto stazionario avrà ordinata massima per $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Punto c)

Per $a = 1$, il punto stazionario è $x = 0$, dove la funzione vale $f_1(0) = 0$. Nel punto $O(0; 0)$ l'equazione della retta tangente è al grafico della funzione è

$$y = f'_1(0) \cdot x = 0$$

ossia la retta tangente ha coefficiente angolare nullo e risulta pertanto tangente all'asse delle ascisse. Per tracciare il grafico bisogna studiare la funzione $f_1(x) = x - \ln(1+x)$.

Il dominio di $f_1(x)$ è $x > -1$. La funzione $f_1(x) = x - \ln(1+x)$ è sempre positiva in tale dominio, ed ha un unico zero in $x = 0$. Questo si può vedere semplicemente usando una calcolatrice grafica. Il comportamento agli estremi è stato già studiato nel punto a) quando abbiamo calcolato i limiti per $a > 0$. La derivata vale $f'_1(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$.

Il denominatore è sempre positivo nel dominio e pertanto il segno della derivata dipende solo dal numeratore. La funzione sarà decrescente per $x \in (-1; 0)$, avrà un punto di minimo assoluto in $O(0; 0)$ e sarà crescente per $x > 0$. La derivata seconda vale $f''_1(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$ ed è pertanto sempre positiva; quindi la funzione è convessa e non presenta punti di flesso, come sapevamo già dallo studio del punto a). Il grafico di $f_1(x)$ è indicato nella figura 1.

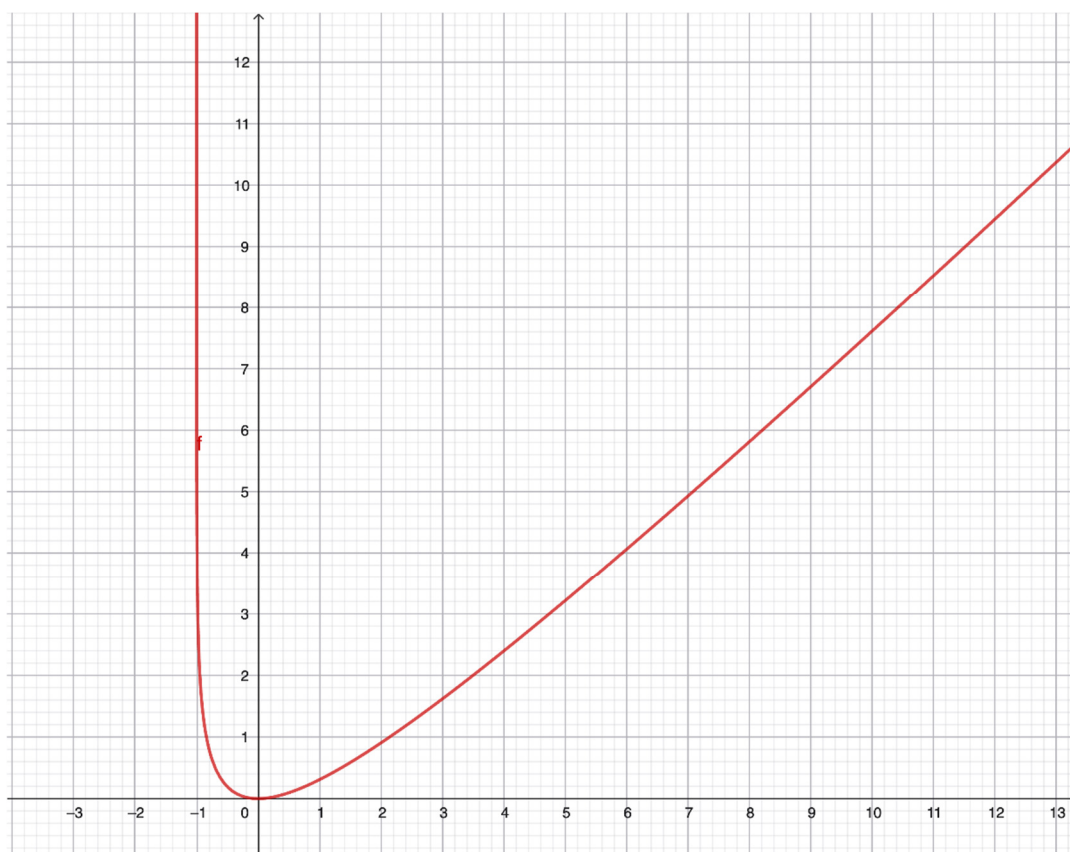


Figura 1

Punto d)

L'area che dobbiamo calcolare, per quanto richiesto dal testo, è la parte di piano delimitata dalla funzione $f_1(x) = x - \ln(1+x)$, dall'asse delle ascisse ($y = 0$) e dalla retta $x = 2$ (figura 2).

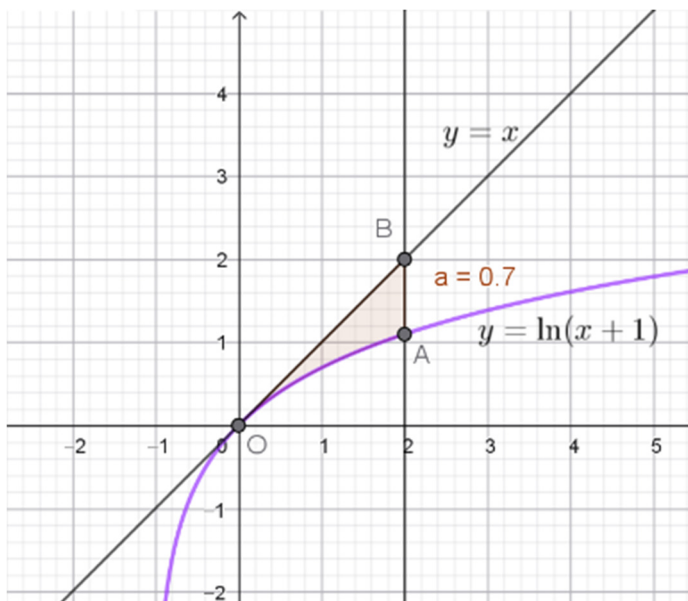


Figura 2

Dal grafico (figura 2) possiamo ricavare che l'area è data da:

$$\mathcal{A} = \int_0^2 (x - \ln(1 + x)) dx$$

Questa espressione è uguale a $F(2) - F(0)$ essendo F una qualunque primitiva della funzione $f_1(x)$; per comodità sceglieremo quella che si ottiene con $c = 0$. Calcoliamo quindi:

$$F(x) = \int (x - \ln(1 + x)) dx$$

L'integrale della somma è uguale alla somma degli integrali:

$$\int x dx = \frac{x^2}{2}$$

e

$$\int \ln(1 + x) dx = (1 + x) \ln(1 + x) - (1 + x) + c$$

da cui

$$F(x) = \frac{x^2}{2} - (1 + x) \ln(1 + x) + (1 + x)$$

Troviamo dunque: $F(2) - F(0) = 5 - 3 \ln 3 - 1 = 4 - 3 \ln 3 \approx 0,704$.

Questa è l'area cercata.

Tabella di analisi/commento del problema

Livello di difficoltà stimato	☐ Basso	☐ Medio	☒ Alto	☐ Molto alto
Formulazione del problema	☐ Scorretta	☐ Ambigua	☐ Poco chiara	☒ Corretta
				☐ Molto chiara

Si tratta di un problema contestualizzato	☒ No	☐ Parzialmente	☐ In modo accettabile	☐ Ben contestualizzato
L'argomento è presente nelle Indicazioni Nazionali	☒ Sì	☐ No		☐ Non è esplicitato / Non è chiaro
L'argomento è presente nel QdR di Matematica?	☐ Sì	☐ No		☒ Non è esplicitato / Non è chiaro (punto c)
Di solito, viene svolto nella pratica didattica usuale?	☒ Sì	☐ No		☐ Non sempre
È un argomento presente nei libri di testo di Matematica?	☐ No	☒ Non sempre		☐ Sempre
Verifica conoscenze / abilità/ competenze fondamentali?	☒ Sì	☐ Solo parzialmente		☐ No
Per la risoluzione del problema è utile una calcolatrice grafica?	☒ Sì	☐ No		☐ Parzialmente