

Esame di Maturità – sessione straordinaria - seconda prova scritta - Liceo scientifico (tutti gli indirizzi) - Prova scritta di Matematica – 24 settembre 2026

QUESITO 5 - soluzione di L. Rossi

5. I grafici delle funzioni $f(x) = 3x$ e $g(x) = \frac{4-x^2}{x^2}$ individuano, nel primo quadrante, una regione di piano limitata S . Determinare il valore del parametro k in modo che la retta di equazione $x = k$ divida S in due regioni equivalenti.

Soluzione

Individuiamo la regione S rappresentando le due funzioni sullo stesso piano cartesiano xOy .

La funzione $y = f(x) = 3x$ è la retta passante per l'origine di coefficiente angolare 3.

La funzione $y = g(x) = \frac{4-x^2}{x^2}$ è razionale fratta, di dominio $\mathbb{R}$, pari; si annulla in $x = -2$ o $x = 2$, il suo segno dipende dal numeratore ed è quindi positiva per $-2 < x < 2$ con $x \neq 0$, negativa altrove.

Possiede asintoto orizzontale $y = -1$ essendo $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4-x^2}{x^2} = -1$ per la regola dei gradi.

La regione S è rappresentata dal triangolo mistilineo in figura.

Dovrà essere $0 < k < 1$ poiché il triangolo sotteso da $f(x)$ nell'intervallo $[0,1]$ ha area maggiore del triangolo mistilineo sotteso da $g(x)$ nell'intervallo $[1,2]$.

Per determinare tale valore di k poniamo:

$$\int_0^k 3x \, dx = \int_k^1 3x \, dx + \int_1^2 \frac{4-x^2}{x^2} \, dx$$

$$\int_0^k 3x \, dx = \int_k^1 3x \, dx + \int_1^2 \left(\frac{4}{x^2} - 1 \right) \, dx$$

$$\left[\frac{3}{2}x^2 \right]_0^k = \left[\frac{3}{2}x^2 \right]_k^1 + \left[-\frac{4}{x} - x \right]_1^2$$

$$\frac{3}{2}k^2 = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}k^2 + (-4 + 5)$$

$$3k^2 = \frac{5}{2}$$

$$k = \pm \frac{\sqrt{30}}{6}$$

La retta $x = \frac{\sqrt{30}}{6}$ divide la regione S in due regioni equivalenti.

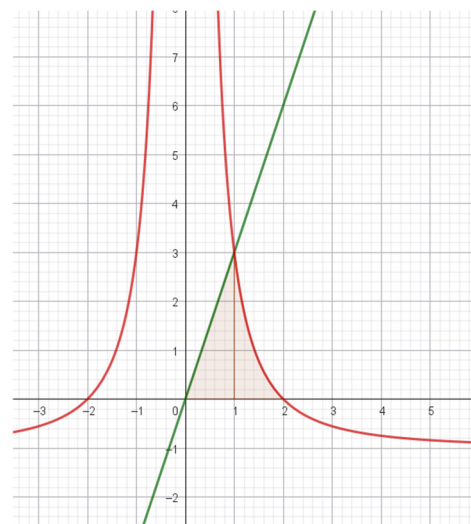


Tabella di analisi del quesito

Livello di difficoltà stimato	☐ Basso	☒ Medio	☐ Alto	☐ Molto alto	
Formulazione del quesito	☐ Scorretta	☐ Ambigua	☐ Poco chiara	☐ Corretta	☒ Molto chiara
L'argomento è presente nelle Indicazioni Nazionali	☒ Sì		☐ No		☐ Non è esplicitato / Non è chiaro
L'argomento è presente nel QdR di Matematica	☒ Sì		☐ No		☐ Non è esplicitato / Non è chiaro
Di solito, viene svolto nella pratica didattica usuale?	☒ Sì		☐ No		☐ Non sempre
È un argomento presente nei libri di testo di Matematica?	☐ No		☐ Non sempre		☒ Sempre
Verifica conoscenze / abilità/ competenze fondamentali?	☒ Sì		☐ Solo parzialmente		☐ No
Per la risoluzione del quesito è utile una calcolatrice grafica?	☒ Sì		☐ No		☐ Parzialmente