

QUESITO 7 - soluzione di C.N. Colacino e L. Tomasi

7. Si consideri la funzione $f(x) = 2 - \frac{4e^x}{1+e^x}$. Dimostrare che f è invertibile in $\mathbb{R}$. Indicata con g la funzione inversa, scrivere la sua espressione analitica e determinare le equazioni degli asintoti di g .

Soluzione

Il dominio della funzione è $D = \mathbb{R}$ in quanto la funzione esponenziale è definita su tutta la retta reale e il denominatore della frazione non si annulla mai. La funzione è dispari, simmetrica rispetto all'origine; infatti si ha

$$\begin{aligned} f(-x) &= 2 - \frac{4e^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{2(1+e^{-x}) - 4e^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{2-2e^{-x}}{1+e^{-x}} = \\ &= \frac{2+2-2-2e^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{4}{1+e^{-x}} - 2 = \frac{4}{1+\frac{1}{e^x}} - 2 = \frac{4e^x}{1+e^x} - 2 = -f(x) \end{aligned}$$

Osservazione 1. Questa funzione può essere espressa nel seguente modo:

$$f(x) = -2 \tanh\left(\frac{x}{2}\right)$$

dove $h(x) = \tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$ è la funzione *tangente iperbolica*.

La sua derivata prima è sempre negativa:

$$f'(x) = -\frac{4e^x(1+e^x) - 4e^{2x}}{(1+e^x)^2} = -\frac{4e^x}{(1+e^x)^2} < 0$$

essendo la funzione esponenziale sempre positiva. La funzione dunque è sempre decrescente e quindi iniettiva, ossia $f(x_1) \neq f(x_2)$ per ogni $x_1 \neq x_2$ nel dominio. Essendo continua e iniettiva, la funzione ammette inversa. Per determinare la sua immagine, studiamo il comportamento agli estremi del dominio:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$$

e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$. L'immagine della funzione è dunque $Im(f(x)) = (-2; 2)$.

Le rette di equazioni $y = \pm 2$ sono pertanto asintoti orizzontali per il grafico di $f(x)$.

Il grafico di $f(x)$ è rappresentato nella figura 1 seguente.

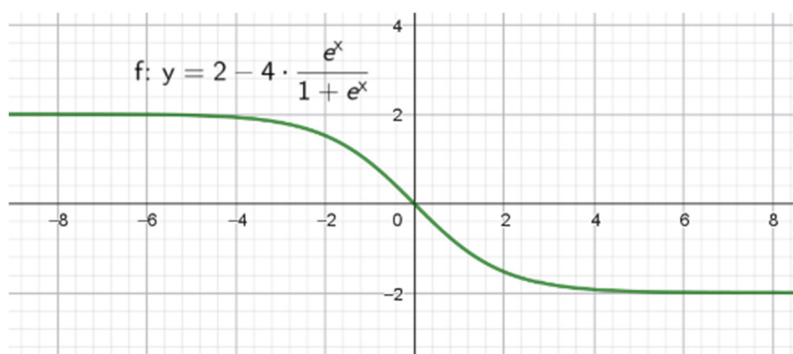


Figura 1

La funzione inversa $g(x)$ avrà pertanto come dominio $D = (-2, 2)$ e come immagine $\mathbb{R}$.

Determiniamo la sua espressione analitica:

$$x = 2 - \frac{4e^y}{1 + e^y} = \frac{2 - 2e^y}{1 + e^y}$$

da cui $x(1 + e^y) = 2 - 2e^y$ che si può riscrivere come $2 - x = e^y(x + 2)$

ossia $e^y = \frac{2-x}{x+2}$. Poiché nell'intervallo aperto $(-2, 2)$ si ha $\frac{2-x}{x+2} > 0$, possiamo applicare il logaritmo di entrambi i membri e otteniamo:

$$y = \ln\left(\frac{2-x}{x+2}\right)$$

L'espressione analitica della funzione inversa è pertanto:

$$g(x) = \ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right)$$

Per trovare gli asintoti, studiamo il comportamento agli estremi del dominio. Sappiamo già che la funzione $g(x)$ non ammetterà asintoti orizzontali.

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2-x}{2+x} = +\infty$$

da cui $\lim_{x \rightarrow -2^+} \ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right) = +\infty$, la retta di equazione $x = -2$ è asintoto verticale della funzione $g(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2-x}{2+x} = 0$$

quindi $\lim_{x \rightarrow 2^-} \ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right) = -\infty$ e anche la retta di equazione $x = 2$ è asintoto verticale per la funzione $g(x)$.

Il grafico della funzione $g(x)$ è riportato nella figura 2 ed è ovviamente il simmetrico del grafico della $f(x)$ rispetto alla bisettrice del 1° e 3° quadrante ($y = x$). La funzione $g(x)$ è anch'essa dispari, ossia il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine degli assi.

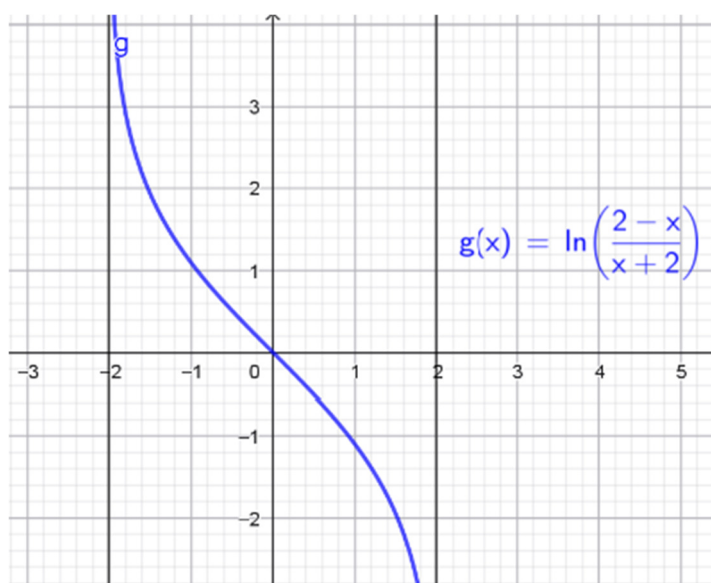


Figura 2

Osservazione 2. La funzione $g(x)$ si può anche indicare con

$$g(x) = -2 \operatorname{atanh}\left(\frac{x}{2}\right)$$

dove $k(x) = \operatorname{atanh}(x) = \operatorname{sett} \tanh(x)$ è la funzione *inversa* della *tangente iperbolica*.

Tabella di analisi del quesito

Livello di difficoltà stimato	☐ Basso	☒ Medio	☐ Alto	☐ Molto alto
Formulazione del quesito	☐ Scorretta	☐ Ambigua	☐ Poco chiara	☐ Corretta ☒ Molto chiara
L'argomento è presente nelle Indicazioni Nazionali	☒ Sì	☐ No	☐ Non è esplicitato / Non è chiaro	
L'argomento è presente nel QdR di Matematica	☒ Sì	☐ No	☐ Non è esplicitato / Non è chiaro	
Di solito, viene svolto nella pratica didattica usuale?	☒ Sì	☐ No	☐ Non sempre	
È un argomento presente nei libri di testo di Matematica?	☐ No	☐ Non sempre	☒ Sempre	
Verifica conoscenze / abilità / competenze fondamentali?	☒ Sì	☐ Solo parzialmente	☐ No	
Per la risoluzione del quesito è utile una calcolatrice grafica?	☒ Sì	☐ No	☐ Parzialmente	