



Ministero dell'Istruzione e del Merito

A002 - ESAME DI MATURITÀ

Testo valevole per tutti i seguenti indirizzi:

LI02, LI03, LI15, LI1S, LI22, LI23, LI31, LI32, LIA2, LIAO,
LIB2, LIC2, LID2, LIJ2, LIJ3, LIJ4, LIIS, LIS2, EA02, EA10

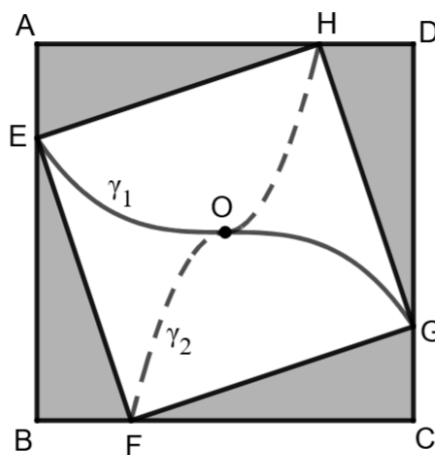
Disciplina: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti del questionario.

PROBLEMA 1

Ai maestri artigiani di Deruta è stata commissionata la realizzazione di un tavolo in ceramica da esterni, di forma quadrata, di lato 1 metro. Sulla superficie del tavolo, si chiede di raffigurare un quadrato con ciascun vertice posto a distanza d dagli spigoli e due linee che lo dovranno attraversare per delimitare le parti da destinare alla decorazione (come in figura).

L'area della superficie ombreggiata equivale ai $\frac{3}{5}$ della rimanente.



- a) Determinare la distanza d tra B e F .

Si consideri un sistema di riferimento con origine nel punto O , centro del tavolo, e i semiassi positivi delle ascisse e delle ordinate passanti, rispettivamente, per il punto medio di CD e AD . La curva γ_1 , che unisce due vertici opposti E , G del quadrato interno, è descritta da una funzione polinomiale di 3° grado ed ha un flesso a tangente orizzontale nel punto O .

Fissato $d = \frac{1}{4}$, ricavare l'espressione analitica $f_1(x)$ di γ_1 , definita nell'intervallo $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

D'ora in avanti, si ponga $f_1(x) = -2x^3$.

- b) Il maestro artigiano afferma: «Il lato EF è tangente a γ_1 nel punto E ». Dimostrare che l'affermazione è falsa e determinare l'ampiezza dell'angolo che EF forma con la retta tangente.


Ministero dell'Istruzione e del Merito
A002 - ESAME DI MATURITÀ

- c) La curva γ_2 , che unisce i vertici opposti F , H del quadrato, è costituita dagli archi di due parabole, tra loro simmetriche rispetto al vertice O comune ad entrambe. Definire a tratti la funzione f_2 , che descrive γ_2 nell'intervallo $\left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right]$.

Il maestro artigiano afferma: «Le curve γ_1 e γ_2 sono tangenti in O ».

Dimostrare che l'affermazione è vera.

Si assuma
$$f_2(x) = \begin{cases} -8x^2, & -\frac{1}{4} \leq x \leq 0 \\ 8x^2, & 0 < x \leq \frac{1}{4} \end{cases}$$

- d) Calcolare l'area di ciascuna delle quattro superfici che γ_1 e γ_2 determinano sul quadrato interno $EFGH$.

PROBLEMA 2

Si considerino la funzione $y = f(x)$, derivabile in $\mathbb{R}$, e le funzioni $g(x) = -\frac{1}{f(x)}$ e $h(x) = f(x) + g(x)$; si indichino con γ_1 , γ_2 , γ_3 , rispettivamente, i grafici delle funzioni f , g , h .

- a) Dimostrare che, se α e β sono gli zeri di f , allora le rette di equazione $x = \alpha$ e $x = \beta$ sono asintoti sia per g che per h . Spiegare perché γ_1 non ha punti in comune né con γ_2 né con γ_3 . Infine, dimostrare che se x_s è ascissa di un punto stazionario per f , con $f(x_s) \neq 0$, allora lo è anche per g e h .
- b) Stabilito che f è una funzione polinomiale di 2° grado, scrivere le espressioni analitiche delle tre funzioni sapendo che $f(0) = -1$, la retta di equazione $x = -1$ è asintoto per γ_2 e $x = -\frac{1}{4}$ è ascissa di un punto stazionario per h .

D'ora in avanti, si ponga $f(x) = 2x^2 + x - 1$.

- c) Si tracci il grafico γ_1 e se ne deducano i grafici γ_2 e γ_3 , specificando intersezioni con gli assi cartesiani, asintoti ed estremi. Verificare se le tre curve presentano flessi.
- d) Determinare i coefficienti reali A , B tali che $g(x) = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{2x-1}$. Successivamente, determinare l'area della regione delimitata da γ_2 e dalla retta di equazione $y = \frac{8}{5}$.

*Ministero dell'Istruzione e del Merito***A002 - ESAME DI MATURITÀ****QUESITI**

1. Si consideri un triangolo ABC , retto in B . La circonferenza di diametro BC interseca AC in D e la tangente a questa circonferenza in D interseca AB in E . Determinare il rapporto tra AE e BE .
2. Nello spazio riferito a un sistema di coordinate cartesiane $Oxyz$, sono dati il punto $A(1,0,2)$ e la retta r definita dalle seguenti equazioni:

$$r: \begin{cases} x = t \\ y = 2t - 1 \\ z = -t + 3 \end{cases}$$

Si richiede di:

- a) determinare l'equazione del piano perpendicolare a r e passante per A ;
 - b) calcolare la distanza fra le rette r e s , dove s è la retta parallela a r e passante per A .
3. La legge $C(t) = at \cdot e^{-bt}$ descrive la concentrazione di un farmaco (misurata in mg/l), al variare del tempo (misurato in ore). Il picco si stima dopo 5 ore dalla somministrazione con un valore di 5,5 mg/l. Determinare, con due cifre significative, i valori dei parametri a e b e le loro unità di misura. Si può affermare che la concentrazione si mantiene al di sopra di 3,0 mg/l per oltre 10 ore? Motivare la risposta.
 4. Determinare i parametri reali a, b, c in modo che la funzione

$$f(x) = \begin{cases} ae^{2-x} + b, & x < 2 \\ \frac{x+c}{x}, & x \geq 2 \end{cases}$$

sia continua su $\mathbb{R}$ e abbia in $x = 2$ un punto angoloso con tangente sinistra di equazione $y = -3 - 6x$ e tangente destra con pendenza $m = 8$.

5. Si consideri la curva $y = e^{1+ax}$, con $a \neq 0$, e la retta r ad essa tangente in un punto P . Indicato con A il punto in cui r incontra l'asse delle ascisse, dimostrare che il segmento AH , dove H è la proiezione ortogonale di P sull'asse x , ha lunghezza costante.

Esprimere questa lunghezza in funzione di a .

6. Studiare al variare del parametro $m \in \mathbb{R}$, con $m \neq \pm 1$, la natura dei punti stazionari del polinomio $P(x) = (m^2 - 1)(x - 1)^2(x - 4)^2 + 2$.

*Ministero dell'Istruzione e del Merito***A002 - ESAME DI MATURITÀ**

7. Daniele e Letizia stanno giocando a Monopoli. Daniele si trova nella casella “Corso Magellano”. Qual è la probabilità che Daniele, lanciando due dadi regolari a sei facce:
- possa ottenere somma 7 e finire così nella casella “In prigione”?
 - non ottenga somma 8, 9 o 11, evitando così di capitare sulle proprietà di Letizia?
 - possa ottenere lo stesso valore su entrambi i dadi e quindi giocare un altro turno?
8. Si consideri la biblioteca di Babele costituita da micro-libri contenenti solo 100 caratteri totali, scritti usando un alfabeto di 22 caratteri (21 lettere e lo spazio).
- a) Quanti sono i possibili micro-libri distinti che si possono scrivere?
 - b) Qual è la probabilità che, estraendo un libro a caso, i primi 5 caratteri formano esattamente la parola “TORRE”?

Durata massima della prova: 6 ore.

È consentito l'uso di calcolatrici scientifiche o grafiche purché non siano dotate della capacità di elaborazione simbolica algebrica e non abbiano la disponibilità di connessione a Internet.

È consentito l'uso del dizionario bilingue (italiano-lingua del Paese di provenienza) per i candidati di madrelingua non italiana. Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla consegna della traccia.