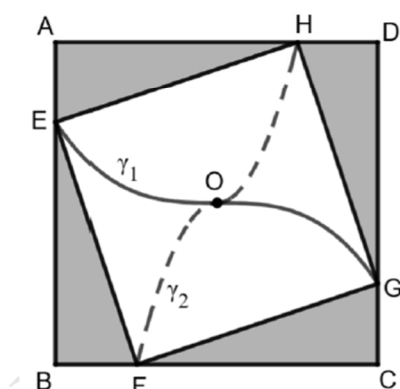


Esame di Maturità – sessione suppletiva - seconda prova scritta - Liceo scientifico (tutti gli indirizzi) - Prova scritta di Matematica – 2 luglio 2026

PROBLEMA 1 – soluzione a cura di L. Tomasi

Ai maestri artigiani di Deruta è stata commissionata la realizzazione di un tavolo in ceramica da esterni, di forma quadrata, di lato 1 metro. Sulla superficie del tavolo, si chiede di raffigurare un quadrato con ciascun vertice posto a distanza d dagli spigoli e due linee che lo dovranno attraversare per delimitare le parti da destinare alla decorazione (come in figura).

L'area della superficie ombreggiata equivale ai $\frac{3}{5}$ della rimanente.



- a) Determinare la distanza d tra B e F .

Si consideri un sistema di riferimento con origine nel punto O , centro del tavolo, e i semiassi positivi delle ascisse e delle ordinate passanti, rispettivamente, per il punto medio di CD e AD . La curva γ_1 , che unisce due vertici opposti E, G del quadrato interno, è descritta da una funzione polinomiale di 3° grado ed ha un flesso a tangente orizzontale nel punto O .

Fissato $d = \frac{1}{4}$, ricavare l'espressione analitica $f_1(x)$ di γ_1 , definita nell'intervallo $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

D'ora in avanti, si ponga $f_1(x) = -2x^3$.

- b) Il maestro artigiano afferma: «Il lato EF è tangente a γ_1 nel punto E ». Dimostrare che l'affermazione è falsa e determinare l'ampiezza dell'angolo che EF forma con la retta tangente.
- c) La curva γ_2 , che unisce i vertici opposti F, H del quadrato, è costituita dagli archi di due parabole, tra loro simmetriche rispetto al vertice O comune ad entrambe. Definire a tratti la funzione f_2 , che descrive γ_2 nell'intervallo $\left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right]$.

Il maestro artigiano afferma: «Le curve γ_1 e γ_2 sono tangenti in O ».

Dimostrare che l'affermazione è vera.

Si assuma $f_2(x) = \begin{cases} -8x^2, & -\frac{1}{4} \leq x \leq 0 \\ 8x^2, & 0 < x \leq \frac{1}{4} \end{cases}$

- d) Calcolare l'area di ciascuna delle quattro superfici che γ_1 e γ_2 determinano sul quadrato interno $EFGH$.

Soluzione

Punto a)

- a) Determinare la distanza d tra B e F .

Si consideri un sistema di riferimento con origine nel punto O , centro del tavolo, e i semiassi positivi delle ascisse e delle ordinate passanti, rispettivamente, per il punto medio di CD e AD . La curva γ_1 , che unisce due vertici opposti E, G del quadrato interno, è descritta da una funzione polinomiale di 3° grado ed ha un flesso a tangente orizzontale nel punto O .

Fissato $d = \frac{1}{4}$, ricavare l'espressione analitica $f_1(x)$ di γ_1 , definita nell'intervallo $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

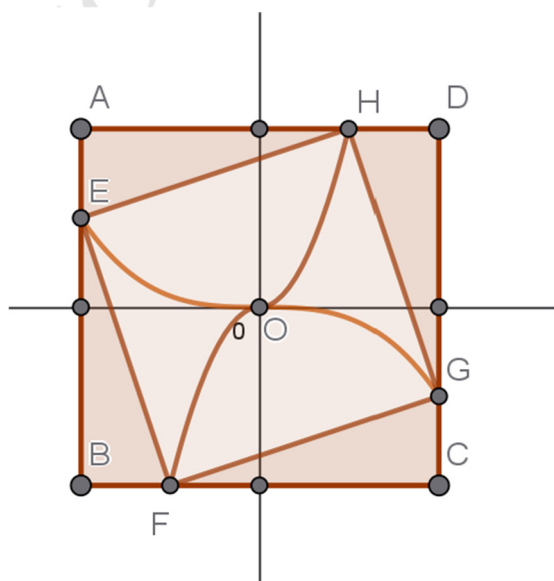


Figura 1

Poniamo $BF = x$ e $FC = y$. Poiché il lato del quadrato $ABCD$ è unitario (figura 1), si ottiene il sistema:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 2xy = \frac{3}{5}(1 - 2xy) \end{cases}$$

Risolvendo, si ha il sistema simmetrico:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ xy = \frac{3}{16} \end{cases}$$

e quindi $x = \frac{1}{4}$ e $y = \frac{3}{4}$. Pertanto $d = 1/4$, come indicato nel testo.

Considerato un sistema di assi cartesiani come scritto nel testo, le coordinate del punto E sono $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ e quelle del punto G, simmetrico di E rispetto ad O, $G\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$.

La funzione cubica, dovendo passare per l'origine degli assi, deve avere equazione

$$f_1(x) = ax^3 + bx^2 + cx$$

La derivata prima è:

$$f_1'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

Poiché deve essere $f_1'(0) = 0$, si ha $c = 0$.

La derivata seconda è:

$$f_1''(x) = 6ax + 2b$$

Poiché deve essere $f_1''(0) = 0$, si ha $b = 0$.

Dunque:

$$f_1(x) = ax^3$$

Imponendo il passaggio per il punto E, si ha infine

$$-\frac{a}{8} = \frac{1}{4}$$

e finalmente $a = -2$. Pertanto l'equazione dell'arco di cubica sarà

$$f_1(x) = -2x^3 \quad \text{con} \quad -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}$$

Punto b)

D'ora in avanti, si ponga $f_1(x) = -2x^3$.

b) Il maestro artigiano afferma: «Il lato EF è tangente a γ_1 nel punto E ». Dimostrare che l'affermazione è falsa e determinare l'ampiezza dell'angolo che EF forma con la retta tangente.

La retta EF ha coefficiente angolare

$$m_1 = \frac{-\frac{3}{4}}{\frac{1}{4}} = -3.$$

La retta tangente alla cubica (figura 2) nel punto E ha coefficiente angolare

$$m_2 = f_1'\left(-\frac{1}{2}\right) = -6\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{2}$$

Pertanto

$$\tan \alpha = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \frac{-3 + \frac{3}{2}}{1 + \frac{9}{2}} = \frac{-\frac{3}{2}}{\frac{11}{2}} = -\frac{3}{11}$$

Quindi

$$\alpha = \arctan\left(-\frac{3}{11}\right) \approx 15,255^\circ \approx 15^\circ 15' 31''$$

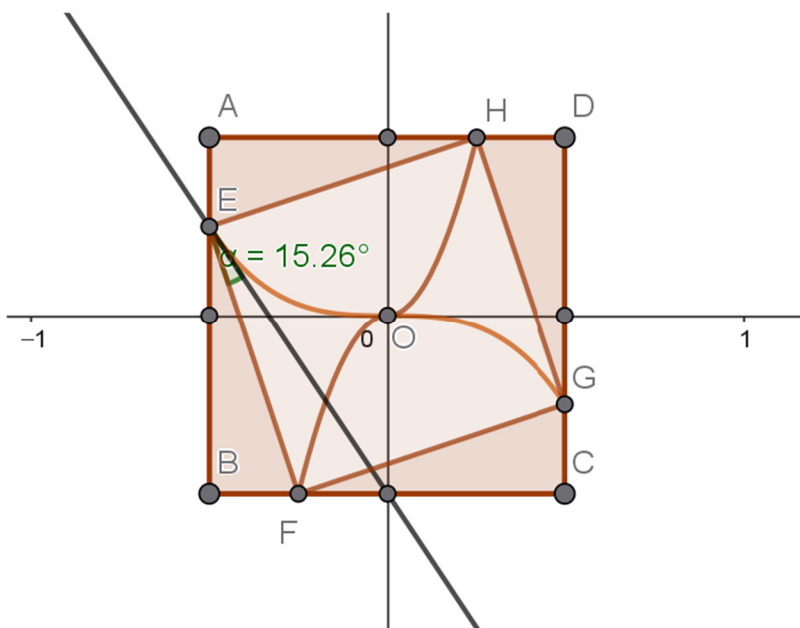


Figura 2

Punto c)

- c) La curva γ_2 , che unisce i vertici opposti F , H del quadrato, è costituita dagli archi di due parabole, tra loro simmetriche rispetto al vertice O comune ad entrambe. Definire a tratti la funzione f_2 , che descrive γ_2 nell'intervallo $\left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right]$.

Il maestro artigiano afferma: «Le curve γ_1 e γ_2 sono tangenti in O ».

Dimostrare che l'affermazione è vera.

Consideriamo l'arco di parabola che passa per O e per il punto H di coordinate $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$. Questo arco di parabola deve avere equazione $y = ax^2$ perché il vertice deve essere O .

Quindi l'equazione della parabola sarà: $y = ax^2$ e il passaggio per il punto H , fornisce $a = 8$. Si ha quindi, come affermato nel testo:

$$f_2(x) = \begin{cases} -8x^2, & -\frac{1}{4} \leq x \leq 0 \\ 8x^2, & 0 < x \leq \frac{1}{4} \end{cases}$$

Calcoliamo la derivata nel punto $x = 0$. Si ha $f_1'(x) = -6x^2$ e quindi $f_1'(0) = 0$

Inoltre

$$f_2'(x) = \begin{cases} -16x, & -\frac{1}{4} \leq x \leq 0 \\ 16x, & 0 < x \leq \frac{1}{4} \end{cases}$$

e quindi $f_2'(0) = 0$.

Pertanto le curve γ_1 e γ_2 sono tangenti nel punto O .

Punto d)

- d) Calcolare l'area di ciascuna delle quattro superfici che γ_1 e γ_2 determinano sul quadrato interno $EFGH$.

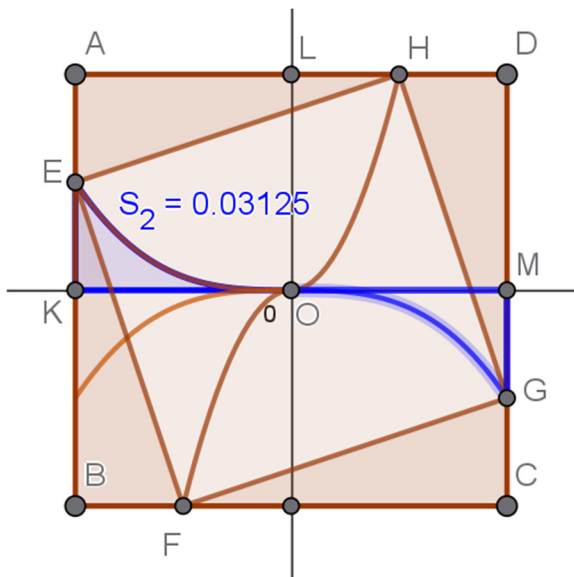


Figura 3

Nella figura 3 calcoliamo l'area del segmento parabolico OHL , con il teorema di Archimede:

$$S_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

Calcoliamo poi, con un integrale l'area del triangolo mistilineo OGM :

$$S_2 = \int_0^{\frac{1}{2}} 2x^3 dx = 2 \cdot \frac{1}{4} [x^4]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{16} - 0 \right) = \frac{1}{32}$$

L'area del quadrato $OMDL$ è

$$S_q = \frac{1}{4}$$

L'area del triangolo AEH è

$$S_t = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{32}$$

Pertanto l'area del triangolo OGH mistilineo è:

$$Area(OGH) = S_q - S_1 + S_2 - S_t = \frac{1}{4} - \frac{1}{12} + \frac{1}{32} - \frac{3}{32} = \frac{5}{48}$$

Il lato del quadrato $EFGH$ è dato da

$$EF = \frac{1}{4} \sqrt{10}.$$

L'area del triangolo mistilineo EOH è

$$Area(EOH) = \frac{1}{2} Area(EFGH) - \frac{5}{48} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{8} - \frac{5}{48} = \frac{5}{24}.$$

Argomento: Geometria; Analisi matematica (in prevalenza).

Tabella di analisi/commento del problema

Livello di difficoltà stimato	☐ Basso	☒ Medio	☐ Alto	☐ Molto alto	
Formulazione del problema	☐ Scorretta	☐ Ambigua	☐ Poco chiara	☒ Corretta	☐ Molto chiara
Si tratta di un problema contestualizzato	☐ No	☐ Parzialmente	☒ In modo accettabile	☐ Ben contestualizzato	
L'argomento è presente nelle Indicazioni Nazionali	☐ Sì		☐ No		☒ Non è esplicitato / Non è chiaro
L'argomento è presente nel QdR di Matematica?	☐ Sì		☐ No		☒ Non è esplicitato / Non è chiaro
Di solito, viene svolto nella pratica didattica usuale?	☐ Sì		☐ No		☒ Non sempre
È un argomento presente nei libri di testo di Matematica?	☐ No		☒ Non sempre		☐ Sempre
Verifica conoscenze / abilità/ competenze fondamentali?	☒ Sì		☐ Solo parzialmente		☐ No
Per la risoluzione del problema è utile una calcolatrice grafica?	☒ Sì		☐ No		☐ Parzialmente