

Esame di Maturità – sessione suppletiva - seconda prova scritta - Liceo scientifico (tutti gli indirizzi) - Prova scritta di Matematica – 2 luglio 2026

PROBLEMA 2 – soluzione a cura di C.N. Colacino e L. Tomasi

Si considerino la funzione $y = f(x)$, derivabile in $\mathbb{R}$, e le funzioni $g(x) = -\frac{1}{f(x)}$ e $h(x) = f(x) + g(x)$; si indichino con $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, rispettivamente, i grafici delle funzioni f, g, h .

- a) Dimostrare che, se α e β sono gli zeri di f , allora le rette di equazione $x = \alpha$ e $x = \beta$ sono asintoti sia per g che per h . Spiegare perché γ_1 non ha punti in comune né con γ_2 né con γ_3 . Infine, dimostrare che se x_s è ascissa di un punto stazionario per f , con $f(x_s) \neq 0$, allora lo è anche per g e h .
- b) Stabilito che f è una funzione polinomiale di 2° grado, scrivere le espressioni analitiche delle tre funzioni sapendo che $f(0) = -1$, la retta di equazione $x = -1$ è asintoto per γ_2 e $x = -\frac{1}{4}$ è ascissa di un punto stazionario per h .

D'ora in avanti, si ponga $f(x) = 2x^2 + x - 1$.

- c) Si tracci il grafico γ_1 e se ne deducano i grafici γ_2 e γ_3 , specificando intersezioni con gli assi cartesiani, asintoti ed estremi. Verificare se le tre curve presentano flessi.
- d) Determinare i coefficienti reali A, B tali che $g(x) = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{2x-1}$. Successivamente, determinare l'area della regione delimitata da γ_2 e dalla retta di equazione $y = \frac{8}{5}$.

Soluzione

Punto a)

Il dominio di $g(x)$ è $x \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) \neq 0$. Quindi, se α e β sono zeri di f , non appartengono al dominio di $g(x)$ e sono punti di singolarità, dato che

$$\lim_{x \rightarrow \alpha} -\frac{1}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow \beta} -\frac{1}{f(x)} = \pm\infty$$

Ne segue che le rette di equazione $x = \alpha$ e $x = \beta$ sono asintoti verticali per la funzione $g(x)$.

Discorso assolutamente analogo per $h(x)$.

Affinché γ_1 abbia punti in comune con γ_2 o con γ_3 devono esistere soluzioni delle equazioni $f(x) = g(x)$ e $f(x) = h(x)$. Verifichiamo che non esistono soluzioni:

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) \\ f(x) &= -\frac{1}{f(x)} \rightarrow f^2(x) = -1 \end{aligned}$$

e questa equazione non ammette soluzioni, perché non esiste alcun $x \in \mathbb{R}$ tale che $f^2(x) = -1$. Consideriamo ora:

$$\begin{aligned} f(x) &= h(x) \\ f(x) &= f(x) - \frac{1}{f(x)} \rightarrow -\frac{1}{f(x)} = 0 \end{aligned}$$

e ovviamente neanche questa equazione ammette soluzioni.

Sia ora x_s un punto stazionario per f , ossia un punto in cui $f'(x_s) = 0$.

La condizione $f(x_s) \neq 0$ ci garantisce che x_s appartiene sia al dominio di $g(x)$ che di $h(x)$.
Calcoliamo $g'(x)$ e $h'(x)$

$$g'(x) = \frac{d}{dx} \left(-\frac{1}{f(x)} \right) = \frac{f'(x)}{f^2(x)}$$

Pertanto se x_s è l'ascissa di un punto stazionario per la funzione $f(x)$ – ossia, dove si ha $f'(x_s) = 0$ – allora lo è anche per la funzione $g(x)$.

Analogamente si ha:

$$h'(x) = \frac{d}{dx} \left(f(x) - \frac{1}{f(x)} \right) = f'(x) + \frac{f'(x)}{f^2(x)} = f'(x) \left(1 + \frac{1}{f^2(x)} \right)$$

Pertanto se x_s è l'ascissa di un punto stazionario per la funzione $f(x)$, allora lo è anche per la funzione $h(x)$.

Punto b)

Si ponga $f(x)$ funzione polinomiale di 2° grado, ossia $f(x) = ax^2 + bx + c$. Determiniamo i coefficienti a , b e c dalle condizioni date.

La condizione $f(0) = -1$ dà $c = -1$. Il fatto che la retta $x = -1$ sia asintoto verticale per γ_2 implica che $f(-1) = 0$ ossia, per il teorema di Ruffini, $f(x) = (x + 1)(ax + b)$.

Il fatto che il termine noto sia -1 impone automaticamente $b = -1$; quindi la nostra funzione quadratica è del tipo $f(x) = (x + 1)(ax - 1) = ax^2 + (a - 1)x - 1$.

La condizione che per $x = -\frac{1}{4}$ la $h(x)$ presenti un punto stazionario, e quindi anche $f'(-\frac{1}{4}) = 0$ per quanto detto al punto a), ci dà

$$f'(x) = 2ax + a - 1$$

e

$$f' \left(-\frac{1}{4} \right) = -\frac{a}{2} + a - 1 = \frac{a}{2} - 1 = 0 \rightarrow a = 2$$

La funzione $f(x)$ che soddisfa le condizioni date pertanto è:

$$f(x) = 2x^2 + x - 1$$

Punto c):

Il grafico γ_1 è riportato in figura 1.

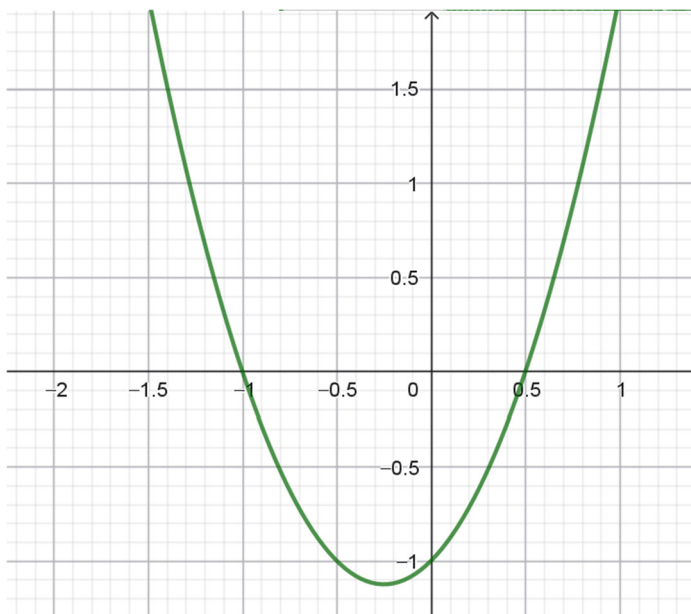


figura 1

Poiché $f(x)$ ha per grafico una parabola con concavità rivolta verso l'alto, assume il suo minimo assoluto in corrispondenza del vertice $V\left(-\frac{1}{4}; -\frac{9}{8}\right)$, ossia per $x = -1/4$. L'asse della parabola è la retta di equazione $x = -\frac{1}{4}$. Il grafico γ_1 interseca l'asse x nei punti di ascissa $x = \alpha = -1$ e $x = \beta = 1/2$ ed è ovviamente positiva per valori esterni all'intervallo delle radici (figura 1).

Poiché $g(x) = -\frac{1}{f(x)}$, possiamo ricavare il grafico γ_2 da quello di γ_1 (figura 2).

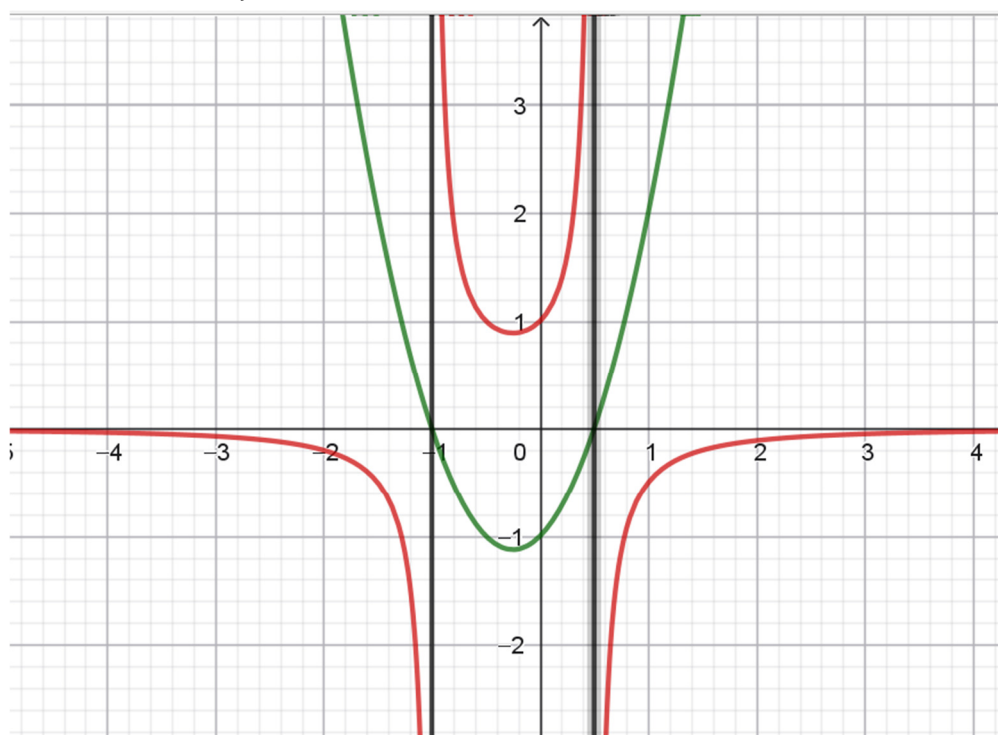


figura 2

Il dominio di $g(x)$ è $D = (-\infty; -1) \cup \left(-1; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

La funzione $g(x)$ non è né pari né dispari e l'unica intersezione con gli assi è il punto $H(0; 1)$.

Il grafico di $g(x)$ è simmetrico rispetto alla retta di equazione $x = -\frac{1}{4}$, esattamente come γ_1 .

Si ha $g(x) > 0$ per $x \in \left(-1; \frac{1}{2}\right)$ e $g(x) < 0$ nell'insieme complementare del dominio. Sappiamo già che le rette $x = -1$ e $x = \frac{1}{2}$ sono asintoti verticali per la funzione. L'asse delle ascisse è asintoto orizzontale in quanto $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 0$.

La derivata prima è

$$g'(x) = \frac{4x + 1}{(2x^2 + x - 1)^2}$$

Sappiamo già che il punto $V\left(-\frac{1}{4}; -\frac{9}{8}\right)$ è l'unico punto stazionario. Dallo studio del segno della derivata prima - basta studiare il numeratore, essendo il denominatore positivo in tutti i punti del dominio - vediamo che la funzione è crescente per $x \in \left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$ e decrescente altrove. Quindi il punto $V\left(-\frac{1}{4}; -\frac{9}{8}\right)$ è un punto di minimo.

La derivata seconda è

$$g''(x) = -6 \frac{4x^2 + 2x + 1}{(2x^2 + x - 1)^3}$$

Il numeratore non si annulla mai, perché $\frac{\Delta}{4} = 1 - 4 = -3 < 0$, quindi la funzione $g(x)$ non ammette flessi.

Il dominio di $h(x)$ è lo stesso di $g(x)$. La funzione $h(x)$ non è pari né dispari. Il suo grafico è riportato in fig. 3 ed è simmetrico rispetto alla retta di equazione $x = -1/4$.

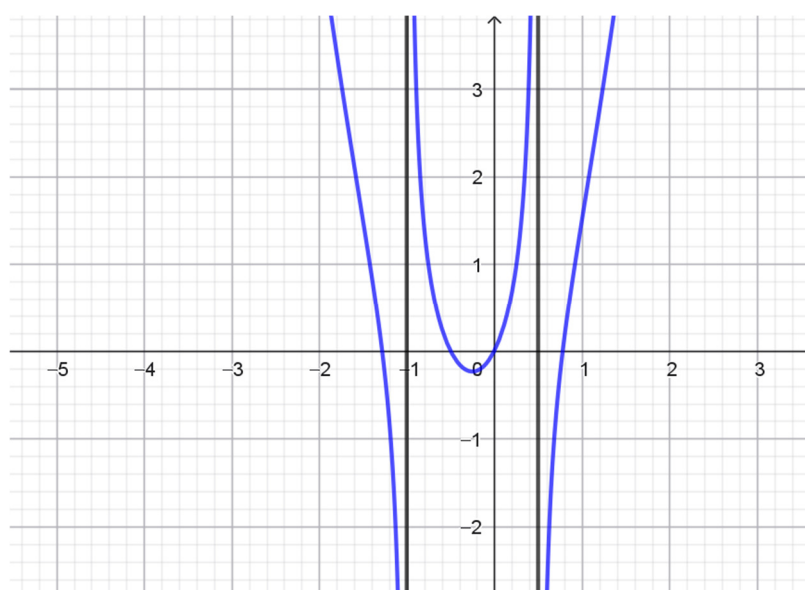


figura 3

Per studiare il segno riscriviamo la funzione $h(x)$:

$$h(x) = 2x^2 + x - 1 - \frac{1}{2x^2 + x - 1} = \frac{(2x^2 + x - 1)^2 - 1}{2x^2 + x - 1} = \frac{(2x^2 + x)(2x^2 + x - 2)}{2x^2 + x - 1}$$

La funzione è positiva per $x \in \left(-\infty; \frac{-1-\sqrt{17}}{4}\right) \cup \left(-1; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(0; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{-1+\sqrt{17}}{24}; +\infty\right)$ e negativa o nulla altrove. Le rette di equazione $x = -1$ e $x = \frac{1}{2}$ sono asintoti verticali per la funzione.

Si vede facilmente che la funzione non ammette né asintoti orizzontali né asintoti obliqui.

Le intersezioni con gli assi sono l'origine $O(0; 0)$ nonché i punti $C\left(\frac{-1-\sqrt{17}}{4}; 0\right)$, $D\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$, $E\left(\frac{-1+\sqrt{17}}{4}; 0\right)$. Sappiamo già che il punto stazionario ha ascissa $x = -\frac{1}{4}$.

La derivata prima vale

$$h'(x) = f'(x) + \frac{f'(x)}{f^2(x)} = f'(x) \left(1 + \frac{1}{f^2(x)}\right)$$

ossia

$$h'(x) = (4x + 1) \left(1 + \frac{1}{(2x^2 + x - 1)^2}\right)$$

Il secondo fattore non si annulla mai, ed è sempre positivo. Il segno dipende dunque solo da $4x + 1$.

$h'(x) > 0$ per $x \in \left(-\frac{1}{4}; \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$; quindi il punto $Z\left(-\frac{1}{4}; -\frac{17}{72}\right)$ è punto di minimo relativo.

La derivata seconda di $h(x)$ è:

$$h''(x) = f''(x) \left(1 + \frac{1}{f^2(x)}\right) - 2 \frac{(f'(x))^2}{f^3(x)}$$

I flessi si trovano risolvendo l'equazione:

$$h''(x) = 0$$

Poiché:

$$h''(x) = 4 \left(1 + \frac{1}{(2x^2 + x - 1)^2}\right) - 2 \frac{(4x + 1)^2}{(2x^2 + x - 1)^3}$$

si trova l'equazione:

$$4 \left(1 + \frac{1}{(2x^2 + x - 1)^2}\right) - \frac{2(4x + 1)^2}{(2x^2 + x - 1)^3} = 0$$

$$\frac{4((2x^2 + x - 1)^2 + 1)}{(2x^2 + x - 1)^2} - \frac{2(4x + 1)^2}{(2x^2 + x - 1)^3} = 0$$

$$\frac{4(2x^2 + x - 1)((2x^2 + x - 1)^2 + 1) - 2(4x + 1)^2}{(2x^2 + x - 1)^3} = 0$$

ossia l'equazione di 6° grado:

$$2(2x^2 + x - 1)((2x^2 + x - 1)^2 + 1) - (4x + 1)^2 = 0.$$

Poiché questo calcolo è estremamente laborioso, ricorriamo a una risoluzione approssimata, tramite una calcolatrice grafica, e otteniamo il grafico (figura 4) della $h''(x)$.

In modo approssimato si trova che la derivata seconda si annulla per $x_1 \approx -1,55$ e per $x_2 \approx 1,05$, che sono le ascisse dei punti di flesso della funzione $h(x)$.

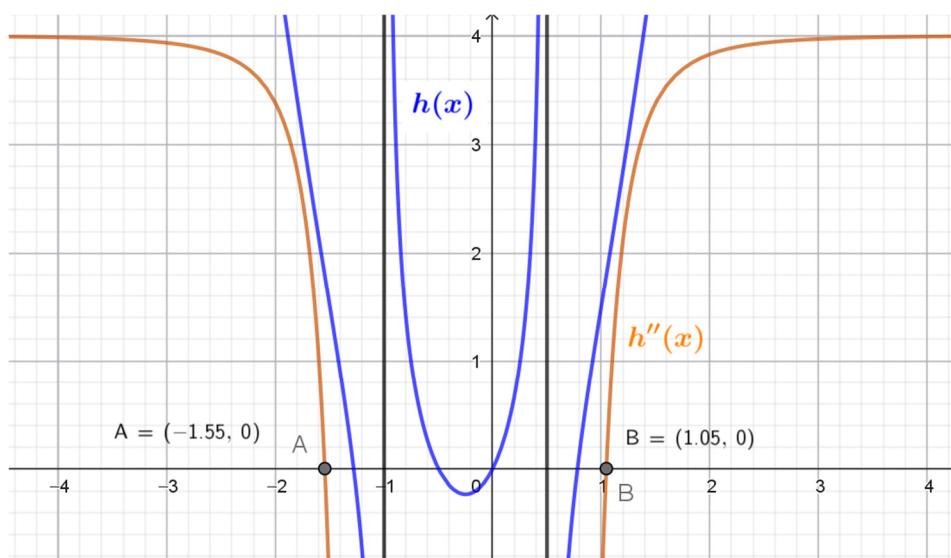


figura 4

La funzione $h(x)$ ammette quindi due flessi (anche se il testo non richiede di calcolarli).

Punto d)

La funzione

$$g(x) = -\frac{1}{2x^2 + x - 1}$$

vogliamo scriverla come

$$g(x) = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{2x-1}$$

Ne segue

$$\frac{A(2x+1) + B(x-1)}{2x^2 + x - 1} = -\frac{1}{2x^2 + x - 1}$$

ossia dobbiamo risolvere il sistema

$$\begin{cases} 2A + B = 0 \\ -A + B = -1 \end{cases}$$

da cui ricaviamo $A = \frac{1}{3}$ e $B = -\frac{2}{3}$.

Si devono trovare le intersezioni tra il grafico γ_2 e la retta di equazione $y = \frac{8}{5}$:

$$-\frac{1}{2x^2 + x - 1} = \frac{8}{5}$$

$$16x^2 + 8x - 3 = 0$$

le cui soluzioni sono $x = -\frac{3}{4}$ $\vee$ $x = \frac{1}{4}$ (figura 5).

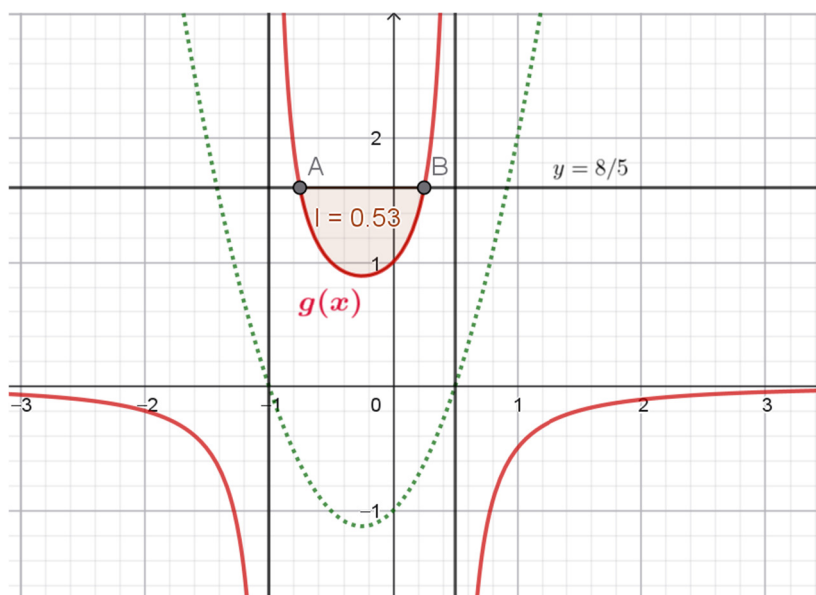


figura 5

Dunque dobbiamo calcolare il seguente integrale

$$S = \int_{-3/4}^{1/4} g(x) \, dx = \int_{-3/4}^{1/4} \left(\frac{1}{3} \frac{1}{x+1} - \frac{2}{3} \frac{1}{2x-1} \right) dx = \frac{1}{3} \int_{-3/4}^{1/4} \left(\frac{1}{x+1} - \frac{2}{2x-1} \right) dx$$

Calcoliamo separatamente i due contributi:

$$\frac{1}{3} \int_{-3/4}^{1/4} \frac{1}{x+1} \, dx = \frac{1}{3} [\ln|x+1|]_{-3/4}^{1/4} = \frac{1}{3} \left(\ln \frac{5}{4} - \ln \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{3} \ln 5$$

e

$$-\frac{1}{3} \int_{-3/4}^{1/4} \frac{2}{2x-1} \, dx = -\frac{1}{3} [\ln|2x-1|]_{-3/4}^{1/4} = -\frac{1}{3} \left(\ln \frac{1}{2} - \ln \frac{5}{2} \right) = \frac{1}{3} \ln 5$$

Pertanto

$$S = \int_{-3/4}^{1/4} g(x) \, dx = \frac{2}{3} \ln 5$$

Quindi l'area richiesta sarà

$$\mathcal{A} = \int_{-3/4}^{1/4} \left(\frac{8}{5} - g(x) \right) dx = \int_{-3/4}^{1/4} \frac{8}{5} \, dx - \int_{-3/4}^{1/4} g(x) \, dx = \frac{8}{5} - \frac{2}{3} \ln 5 \approx 0,53$$

Argomento: Analisi matematica (“Calculus”).

Tabella di analisi/commento del problema

Livello di difficoltà stimato	☐ Basso	☐ Medio	☐ Alto	☒ Molto alto (punto c)	
Formulazione del problema	☐ Scorretta	☐ Ambigua	☒ Poco chiara	☐ Corretta	☐ Molto chiara
Si tratta di un problema contestualizzato	☒ No	☐ Parzialmente	☐ In modo accettabile	☐ Ben contestualizzato	
L'argomento è presente nelle Indicazioni Nazionali	☒ Sì		☐ No		☐ Non è esplicitato / Non è chiaro

L'argomento è presente nel QdR di Matematica?	☒ Sì	☐ No	☐ Non è esplicitato / Non è chiaro
Di solito, viene svolto nella pratica didattica usuale?	☒ Sì	☐ No	☐ Non sempre
È un argomento presente nei libri di testo di Matematica?	☐ No	☐ Non sempre	☒ Sempre
Verifica conoscenze / abilità/ competenze fondamentali?	☒ Sì	☐ Solo parzialmente	☐ No
Per la risoluzione del problema è utile una calcolatrice grafica?	☒ Sì	☐ No	☐ Parzialmente