

Concorso ordinario 1984 - Classe A049 - Matematica e Fisica

Prova scritta di matematica

1) In un sistema di assi coordinati ortogonali $Oxyz$ è data la circonferenza C di equazioni:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

A. Si determini il luogo L dei punti dello spazio che proiettano la circonferenza C nel piano $x = 0$ in parabole e si studi la totalità delle parabole così ottenute.

B. Si esamini la corrispondenza che si ottiene quando si definiscono corrispondenti due punti del luogo L dai quali la circonferenza C è proiettata nella stessa parabola.

2) In un sistema di assi coordinati ortogonali Oxy sono assegnati nell'ordine cinque punti

$$P_i = (x_i, y_i) \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5).$$

A. Si formuli un algoritmo, in termini delle coordinate (x_i, y_i) , per stabilire se i punti P_i sono a tre a tre non allineati e, in questa ipotesi, si formulino successivamente, sempre in termini delle coordinate (x_i, y_i) , un algoritmo per stabilire se la poligonale $P_1P_2P_3P_4P_5P_1$ è non intrecciata, un algoritmo per stabilire se la stessa poligonale delimita un poligono convesso ed un algoritmo per il calcolo dell'area A di tale poligono, deducendone che essa è una funzione continua delle dieci variabili $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4, x_5, y_5$.

B. Dati in particolare i punti

$$P_1 = (0,0), P_2 = (0,2), P_3 = (2,2), P_4 = (1,1), P_5 = (2,0),$$

si determini il baricentro del poligono S delimitato dalla poligonale $P_1P_2P_3P_4P_5P_1$ e si individui, mediante opportune disequazioni, la regione R del piano formata dai punti che vedono la figura S sotto un angolo di ampiezza $\geq \pi/4$ (un punto P appartiene alla regione R se non esiste alcuna regione angolare di ampiezza minore di $\pi/4$, con vertice in P , che contiene per intero la figura S) e si calcoli l'area di R .

C. Si scelgano in modo casuale due numeri interi a e b , entrambi compresi tra 1 e 100, estremi inclusi, e si calcoli la probabilità che il punto di coordinate $(a/50, b/50)$ sia interno al detto poligono S .

3) A. Si risolva l'equazione differenziale

$$(1 + x^2)^2 yy' + 2x = 0$$

si studi la famiglia delle curve ottenute.

B. Si costruisca un algoritmo per la soluzione numerica della precedente equazione e lo si traduca eventualmente in un programma mediante uno dei linguaggi correnti.

(Durata massima della prova di Matematica: 8 ore)¶

Prova scritta di fisica

1) Le equazioni di Maxwell e le trasformazioni di Lorentz.

2) Dalla legge dei gas perfetti espressa nella forma

$$p V = 2 n N \zeta / 3$$

(dove p indica la pressione del gas, V il volume, n il numero di grammolecole, N il numero di Avogadro

ed ζ l'energia media delle molecole) dedurre il rapporto tra calore specifico a pressione costante e calore specifico a volume costante sia per un gas monoatomico sia per un gas biatomico.

Calcolare quindi: a) la velocità quadratica media degli atomi di gas elio, se questo si trova alla temperatura di 0°C e la corrispondente lunghezza d'onda associata di De Broglie, b) l'energia E necessaria per ionizzare un atomo di idrogeno (si ipotizzi l'elettrone dell'atomo di idrogeno alla distanza di $0,05 \text{ nm}$ dal nucleo in condizioni di equilibrio) e la temperatura a cui si debbono trovare gli atomi di idrogeno affinché la loro energia cinetica media sia E ; c) l'incremento di entropia per una grammolecola di idrogeno che passi da 273°K a 742°K sia a volume costante sia a pressione costante. Infine si determinino i livelli energetici possibili come autovalori per un atomo di elio confinato in una "scatola cubica" di lato 1 mm (si consideri cioè un atomo di elio confinato in un cubo al cui interno il potenziale è nullo e alle pareti diviene infinito). Si calcoli quindi il valore del livello energetico più basso.

(Si ricordano i valori di alcune grandezze:

numero di Avogadro = $6,0 \cdot 10^{23}$

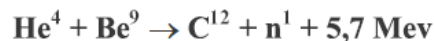
costante R del gas perfetto = $8,3 \text{ J}/^\circ\text{K}$

massa di grammoatomo di elio = $4,0 \text{ g}$

costante di Planck = $6,6 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$)

3) Una sferetta di vetro del raggio di 5 mm (densità $2,7 \text{ g}/\text{cm}^3$) urta elasticamente una sferetta di acciaio di uguali dimensioni (densità $8,1 \text{ g}/\text{cm}^3$). La pallina di vetro acquista la velocità con cui va ad urtare la sferetta di acciaio rotolando lungo un piano inclinato alto 29 cm e lungo 90 cm . Calcolare la velocità della sferetta di vetro prima e dopo l'urto e la velocità della sferetta di acciaio dopo l'urto, sapendo che la sferetta di vetro (o meglio il suo baricentro) prima dell'urto si muove lungo una retta che dista 6 mm dal baricentro della sferetta in acciaio.

Si studi quindi la reazione:



e si determini la velocità massima del neutrone prodotto se la reazione avviene bombardando una targhetta di Be con particelle alfa accelerate per mezzo di una d.d.p. di $1.000.000 \text{ Volt}$.

(Si ricordano i valori di alcune grandezze:

massa del neutrone = $1,67 \cdot 10^{-27} \text{ Kg}$

massa del He^4 = $6,6 \cdot 10^{-27} \text{ Kg}$

massa del Be^9 = $1,5 \cdot 10^{-26} \text{ Kg}$

massa del C^{12} = $2,0 \cdot 10^{-26} \text{ Kg}$

carica dell'elettrone = $1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$)

Si tratti quindi il tema della radioattività sia naturale che indotta.

(Durata massima della prova di Fisica: 8 ore)