Concorso ordinario 1984 - Classe A049 - Matematica e Fisica

Prova scritta di matematica

1) In un sistema di assi coordinati ortogonali **Oxyz** è data la circonferenza **C** di equazioni:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

A. Si determini il luogo **L** dei punti dello spazio che proiettano la circonferenza **C** nel piano **x = 0** in parabole e si studi la totalità delle parabole così ottenute.
B. Si esamini la corrispondenza che si ottiene quando si definiscono corrispondenti due punti del luogo **L** dai quali la circonferenza **C** è proiettata nella stessa parabola.

2) In un sistema di assi coordinati ortogonali **Oxy** sono assegnati nell'ordine cinque punti

$$\mathbf{P_i = (x_i, y_i) \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5).}$$

A. Si formuli un algoritmo, in termini delle coordinate ($\mathbf{x_i y_i}$), per stabilire se i punti $\mathbf{P_i}$ sono a tre a tre non allineati e, in questa ipotesi, si formulino successivamente, sempre in termini delle coordinate ($\mathbf{x_i, y_i}$), un algoritmo per stabilire se la poligonale $\mathbf{P_1P_2P_3P_4P_5P_/}$ è non intrecciata, un algoritmo per stabilire se la stessa poligonale delimita un poligono convesso ed un algoritmo per il calcolo dell'area **A** di tale poligono, deducendone che essa è una funzione continua delle dieci variabili $\mathbf{x_l, y_l,}$ $\mathbf{x_5, y_5}$
B. Dati in particolare i punti

$$\mathbf{P_l = (0,0),\ P_2 = (0,2),\ P_3 = (2,2),\ P_4 = (1,1),\ P_5 = (2,0),}$$

si determini il baricentro del poligono **S** delimitato dalla poligonale $\mathbf{P_1P_2P_3P_4P_5P_/}$ e si individui, mediante opportune disequazioni, la regione **R** del piano formata dai punti che vedono la figura **S** sotto un angolo di ampiezza $\geq \pi/4$ (un punto **P** appartiene alla regione **R** se non esiste alcuna regione angolare di ampiezza minore di $\pi/4$, con vertice in **P**, che contiene per intero la figura **S)** e si calcoli l'area di **R**.
C. Si scelgano in modo casuale due numeri interi **a** e **b**, entrambi compresi tra **1** e **100**, estremi inclusi, e si calcoli la probabilità che il punto di coordinate (**a/50**, **b/50**) sia interno al detto poligono **S**.

3) A. Si risolva l'equazione differenziale

$$\mathbf{(1 + x^2)^2\, yy' + 2x = 0}$$

si studi la famiglia delle curve ottenute.
B. Si costruisca un algoritmo per la soluzione numerica della precedente equazione e lo si traduca eventualmente in un programma mediante uno dei linguaggi correnti.

(Durata massima della prova di Matematica: 8 ore)

Prova scritta di fisica

1) Le equazioni di Maxwell e le trasformazioni di Lorentz.

2) Dalla legge dei gas perfetti espressa nella forma

$$\mathbf{p\ V = 2\ n\ N\ Ç\ /\ 3}$$

(dove **p** indica la pressione del gas, **V** il volume, **n** il numero di grammomolecole, **N** il numero di Avogadro
ed Ç l'energia media delle molecole) dedurre il rapporto tra calore specifico a pressione costante e calore specifico a volume costante sia per un gas monoatomico sia per un gas biatomico.
Calcolare quindi: a) la velocità quadratica media degli atomi di gas elio, se questo si trova alla temperatura di **0°C** e la corrispondente lunghezza d'onda associata di De Broglie, b) l'energia **E** necessaria per ionizzare un atomo di idrogeno (si ipotizzi l'elettrone dell'atomo di idrogeno alla distanza di **0,05 nm** dal nucleo in condizioni di equilibrio) e la temperatura a cui si debbono trovare gli atomi di idrogeno affinché la loro energia cinetica media sia **E**; c) l'incremento di entropia per una grammomolecola di idrogeno che passi da **273°K** a **742°K** sia a volume costante sia a pressione costante. Infine si determinino i livelli energetici possibili come autovalori per un atomo di elio confinato in una "scatola cubica" di lato **1 mm** (si consideri cioè un atomo di elio confinato in un cubo al cui interno il potenziale è nullo e alle pareti diviene infinito). Si calcoli quindi il valore del livello energetico più basso.
(Si ricordano i valori di alcune grandezze:
numero di Avogadro = $6{,}0.10^{23}$
costante R del gas perfetto = 8,3 J/°K
massa di grammoatomo di elio = 4,0 g
costante di Planck = $6{,}6.10^{-34}$ J.s)

3) Una sferetta di vetro del raggio di **5 mm** (densità **2,7 g/cm^3**) urta elasticamente una sferetta di acciaio di uguali dimensioni (densità **8,1 g/cm^3**). La palliria di vetro acquista la velocità con cui va ad urtare la sferetta di acciaio rotolando lungo un piano inclinato alto **29 cm** e lungo **90 cm**. Calcolare la velocità della sferetta di vetro prima e dopo l'urto e la velocità della sferetta di acciaio dopo l'urto, sapendo che la sferetta di vetro (o meglio il suo baricentro) prima dell'urto si muove lungo una retta che dista **6 mm** dal baricentro della sferetta in acciaio.
Si studi quindi la reazione:

$$\mathbf{He^4 + Be^9 \rightarrow C^{12} + n^1 + 5{,}7\ Mev}$$

e si determini la velocità massima del neutrone prodotto se la reazione avviene bombardando una targhetta di **Be** con particelle alfa accelerate per mezzo di una d.d.p. di **1.000.000 Volt**.
(Si ricordano i valori di alcune grandezze:
massa del neutrone = $1{,}67.10^{-27}$ Kg
massa del He^4 = $6{,}6.10^{-27}$ Kg
massa del Be^9 = $1{,}5.10^{-26}$ Kg
massa del C^{12} = $2{,}0.10^{-26}$ Kg
carica dell'elettrone = $1{,}6.10^{-19}$ C)
Si tratti quindi il tema della radioattività sia naturale che indotta.

(Durata massima della prova di Fisica: 8 ore)