Concorso a cattedre 1990 - Classe di concorso A049 - Matematica e Fisica

Testo delle due prove scritte (Matematica e Fisica)

Concorso ordinario 1990

Prova scritta di Matematica

Il candidato svolga uno dei seguenti temi:

1) Trovare l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y' = 1 + y / x$$

- La funzione f_n, definita sull'insieme **R** dei reali maggiori o uguali a zero e che assume valori in **R** sia così definita:

$$\begin{cases} f_n(x) = x(n + \log x) & \textit{per ogni } x \textit{ reale} > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

essendo **log x** il logaritmo naturale di **x** ed **n** un intero assoluto. Sia C_n il grafico della f_n, in un sistema di riferimento cartesiano ortogonale monometrico.

Mostrare che le funzioni f_n, di **x** presentano un minimo; studiare l'andamento delle C_n per $x = 0$ e per **x** tendente a più infinito. Mostrare che la curva C_{n+1}, grafico della funzione $f_{n+1}(x)$, può essere dedotto dalla curva C_n per mezzo di un'omotetia, di centro nell'origine e rapporto da determinare.

- Posto $n = 0$ nella $f_n(x)$, tracciare il grafico C_o.

- Sia α la soluzione dell'equazione

$$f_o(t) = 1$$

Dedurre una limitazione per la radice α.

Descrivere un algoritmo per il calcolo approssimato di α.

- Considerare la trasformazione φ_a del piano in se stesso, che ad ogni punto **M(x,y)** associa il punto **M' (x',y')** tale che

$$\begin{cases} x' = ax \\ y' = ax \log a + ay & \textit{essendo } a \textit{ un reale} > 0. \end{cases}$$

Mostrare che l'insieme Φ delle applicazioni φ_a quando a descrive l'insieme dei reali maggiori di zero, è un gruppo rispetto alla composizione di applicazioni.

- Trattare la funzione logaritmo nel campo reale e nel campo complesso.

2) Calcolare l'integrale definito

$$S_n(K) = \int_k^{e^{-n}} x(n + \log x)\, dx$$

dove **log x** è il logaritmo naturale.
Mostrare che $S_n(k)$ ammette un limite U_n quando **k** tende a zero. Mostrare che la successione dei valori U_n (con **n** numero naturale) è una progressione geometrica, di cui si troveranno il primo termine e la ragione.
- Considerare l'insieme di coniche C_k definite in un sistema di assi coordinati ortogonali monometrici da:

$$x^2 + (k + 2)\, y^2 - 2xy - 6kx = 0$$

con **k** reale.
Determinare per quali valori di **k** si ottengono coniche degeneri.
Determinare per quali valori di **k** si ottengono iperboli aventi gli asintoti ortogonali.
Ridurre a forma canonica la conica C_{-1}.
- Considerare un punto **P** qualunque della parabola di equazione

$$y^2 = \frac{3x}{\sqrt{2}}.$$

Considerare la normale **n** alla parabola e la perpendicolare **p** all'asse di simmetria condotte dal punto **P**: mostrare che la lunghezza del segmento determinato da **n** e da **p** sull'asse di simmetria della parabola è indipendente da **P**. - Esporre la nozione di probabilità subordinata, il teorema della probabilità composta e il teorema di Bayes, corredando l'esposizione con esempi didattici a livello di Scuola Secondaria Superiore.

3) In un sistema di assi coordinati ortogonali monometrici di origine **O** considerare il punto **A(-1,0)** e il punto **C(O,k)**, con **k** numero reale.
- Trovare l'equazione del luogo dei punti **M** ed **N** comuni alla retta **AC** e alla circonferenza di centro **C** e passante per **O**. Studiare questo luogo di punti mettendone in evidenza le singolarità.
- Considerare l'inversione per raggi vettori reciproci di centro nell'origine e raggio **r =** $\hat{O}\hat{A}$. Scrivere le equazioni di tale trasformazione geometrica ed elencarne alcune proprietà.
Trovare le equazioni delle inverse della retta **AC** e della circonferenza di centro **C** passante per **O**. Dedurre il luogo dei punti **M'** ed **N'** inversi di **M** ed **N**. Indicare inoltre una costruzione geometrica di tali punti.
Sia **M'** il punto di ascissa positiva: dimostrare che la bisettrice dell'angolo $A\hat{M}'O$ ha una direzione fissa.
- Trovare il luogo geometrico dell'ortocentro **H** del triangolo **AM'O**.
- Trattare i metodi di integrazione delle equazioni differenziali.

(Primo giorno: prova scritta di Matematica, durata massima della prova: 8 ore)

Prova scritta di Fisica
Il candidato tratti a scelta uno dei seguenti temi:

1) Diffrazione di Fraunhofer e di Fresnel.

2) Un tubetto di rame (densità **8,93 g/cm^3**) del diametro esterno di **10 mm** e interno di **9 mm**, lungo **120 mm** , è appoggiato alle estremità su un binario costituito da due rotaie di rame distanti tra loro **12 cm** e inclinate di un angolo di **30°** rispetto al piano di terra.
Le due rotaie sono collegate da una resistenza di **15 Ω** e poste in un campo magnetico uniforme verticale di induzione magnetica **2 Wb/m^2**.
Calcolare la velocità limite che il cilindro raggiunge rotolando sul binario: si supponga di potere trascurare la resistenza meccanica e la resistenza elettrica di cilindro e rotaie.
Calcolare quindi l'energia cinetica (di traslazione e di rotazione) acquisita dal cilindro di rame.
La velocità raggiunta dal cilindro di rame può essere misurata per mezzo della differenza in lunghezza d'onda tra un fascio di onde elettromagnetiche incidente sul cilindro e il fascio riflesso (effetto Doppler) supposto che emittente e ricevente siano in testa al binario.
Calcolare la variazione della frequenza dell'onda riflessa rispetto a quella dell'onda incidente quando il cilindro ha raggiunto la velocità limite, sapendo che le onde elettromagnetiche incidenti hanno una frequenza di **43 GHz**.
Calcolare la potenza dissipata nella resistenza elettrica posta tra le rotaie quando il cilindro si muove alla velocità limite.

3) Calcolare l'energia del campo elettrico di una sfera conduttrice di raggio **R** su cui è posta una carica **Q**.
Supposto che la massa dell'elettrone (**0,911 · 10^{-30} kg**) sia dovuta interamente all'energia del suo campo elettrico, calcolare il raggio dell'elettrone nelle ipotesi:
a) che la sua carica sia distribuita uniformemente sulla superficie di una sfera;
b) che la sua carica sia distribuita uniformemente nel volume di una sfera. (carica dell'elettrone **1,60 · 10-19 Coulomb**, velocità della luce nel vuoto **3,00 · 10^8 m**/s).
Si analizzino quindi le caratteristiche dell'elettrone (massa a riposo, massa dinamica, carica elettrica, spin, ...) e si tratti come la ricerca sul comportamento dell'elettrone abbia segnato lo sviluppo della fisica nell'ultimo secolo.

(Secondo giorno: prova scritta di Fisica, durata massima della prova: 8 ore)